Научно-практический электронный журнал
Оригинальные исследования (ОРИС), *ISSN 2222-0402*
www.ores.su
original-research.ru

УДК 519.635.8

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИНЫ

Родин Вячеслав Викторович
доцент, к.т.н.
89879979005@rambler.ru

Осенов Никита Александрович
студент
osenovnik@mail.ru

ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», г. Саранск
ул. Большевистская, д. 68, г. Саранск, Республика Мордовия, 430005

Аннотация

Статья посвящена разработке математической модели колебаний винтовых пружин. Приводится материал, посвященный уравнениям колебаний про-странственного криволинейного стержня. Рассматриваются допущения не-обходимые для расчета параметров колебаний, уравнения равновесия Кирхгофа и дополнительные уравнения Клебша.

Ключевые слова: брус, пружина, колебания, уравнения, модель, сила, момент, условие.

MATHEMATICAL MODEL OF MECHANICAL VIBRATIONS OF A SPRING

Vyacheslav V. Rodin
associate professor, ph.d.

Nikita A. Osenov
student

National Research Mordovia State University
st. Bolshevistskaya, 68, Saransk, Republic of Mordovia, 430005

ABSTRACT

The article is devoted to the development of a mathematical model of oscilla-tions of helical springs. The material devoted to the equations of vibrations of a spatial curvilinear rod is given. The assumptions necessary for calculating the oscillation parameters, the Kirchhoff equilibrium equations and additional Clebsch equations are considered.

Keywords: bar, spring, vibrations, equations, model, force, moment, condition.

Введение. Разработка математических моделей колебаний цилиндрических винтовых пружин является актуальной задачей. Созданы математические модели, описывающие колебания как непосредственно пружины, так и эквивалентного бруса, заменяющего её. Эквивалентный брус является приближением, позволяющим существенно упростить расчет параметров колебаний.

Математическая модель, в которой пружина рассматривается в виде пространственного винтового цилиндрического стержня, является существенно более сложной, но более точно описывающей колебания задачей. Рассматриваются колебания пружины с распределенной массой, жесткостью и бесконечным числом степеней свободы. При расчете параметров такой модели решается система уравнений в частных производных, опиывающая колебания пространственного стержня.

Цель исследования. Разработка математической модели колебаний цилиндрической пружины.

Материалы и методы исследования. При создании модели колебаний цилиндрической винтовой пружины используются уравнения равновесия Кирхгофа [1]:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial s} + Q_z q - Q_y r - q_x = 0,$$
$$\frac{\partial Q_y}{\partial s} + Q_x r - Q_z p - q_y = 0,$$
$$\frac{\partial Q_z}{\partial s} + Q_y p - Q_x q - q_z = 0,$$
$$\frac{\partial M_x}{\partial s} + M_z q - M_y r - Q_y - m_x = 0,$$
$$\frac{\partial M_y}{\partial s} + M_x r - M_z p + Q_x - m_y = 0,$$
$$\frac{\partial M_z}{\partial s} + M_y p - M_x q - m_z = 0, \tag{1}$$

где Qx, Qy, Qz – величины внутренних сил в пружине вдоль осей ОХ, ОУ, OZ; Mx, My, Mz – величины моментов сил в пружине вдоль осей ОХ, ОУ, OZ; p, q, r – величины проекций кривизны на оси ОХ, ОУ, OZ; s – величина длины стержня пружины; qx, qy, qz – величины проекций распределенной нагрузки на оси ОХ, ОУ, OZ; mx, my, mz – величины проекций распределенного момента на оси ОХ, ОУ, OZ.

Системы уравнений определяет величины линейных и угловых перемещений во вращающейся системе координат, начало которой совпадает с осевой линией стержня пружины, а оси ОХ, ОУ, OZ соответственно совпадают по направлению с нормалью, бинормалью и касательной. Перемещение начала координат на элементарное расстояние ds по осевой линии стержня пружины вызывает перемещение системы на это расстояние и поворот относительно осей координат.

Колебания пространственного стержня являются статически неопределенной задачей, поэтому кроме уравнений равновесия используются уравнения Клебша, определяющие взаимосвязь между линейными, угловыми перемещениями и линейной деформацие:

$$\psi_y = \frac{\partial u}{\partial s} - vr_o + wq_o,$$

$$-\varphi_x = \frac{\partial v}{\partial s} - wp_o + ur_o,$$

$$\varepsilon = \frac{\partial w}{\partial s} - uq_o + vp_o,$$

$$p^* = \frac{\partial \varphi_x}{\partial s} + q_o\Theta_z - r_o\psi_y,$$

$$q^* = \frac{\partial \psi_y}{\partial s} + r_o\varphi_x - p_o\Theta_z,$$

$$r^* = \frac{\partial \Theta_z}{\partial s} + p_o\psi_y - q_o\varphi_x, \qquad (2)$$

где u, v, w – линейные перемещения точки Oo в направлении осей OoXo, OoYo, OoZo; φx, ψy,Θz – углы поворота системы координат OXYZ относительно системы координат Oo XoYo Zo; po, qo, ro – проекции кривизны недеформированного элемента на оси OoXo, OoYo, OoZo; p*, q*, r*– приращения соответствующих кривизн po, qo, ro при деформации.

Рассматривается перемещение системы координат соответствующее началу (Oo XoYo Zo) и концу (OXYZ) элемента ds.

При колебаниях пружины около положения статического равновесия кривизны, внутренние силы, моменты сил составляют сумму их исходных величин и приращений:

$$p = p_o + p^*, \qquad q = q_o + q^*, \qquad r = r_o + r^*,$$

$$Q_x = Q_{xo} + Q_x^*, \qquad Q_y = Q_{yo} + Q_y^*, \qquad Q_z = Q_{zo} + Q_z^*,$$

$$M_x = M_{xo} + M_x^*, \qquad M_y = M_{yo} + M_y^*, \qquad M_z = M_{zo} + M_z^*, \qquad (3)$$

где Qxo, Qyo, Qzo – величины внутренних сил по OX, OY, OZ в положении равновесия; Qx*, Qy*, Qz* – приращения сил при колебаниях; Mxo, Myo, Mzo – величины моментов внутренних сил по OX, OY, OZ в положении равновесия; Mx*, My*, Mz* – приращения моментов.

Колебания пружины вызывают приращения моментов и отклонений много меньше начальных значений, что позволяет исключить малые значения произведений Qz*q*, Qy*r*, Qx*r*, Qz*p*, Qy*p*, Qx*q*, Mz*q*, My*r*, Mx*r*, Mz*p*, My*p*, Mx*q*.

Проекции q, m по OX, OY, OZ, при периодической внешней нагрузке равны:

$$q_x = \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_{вних},$$

$$q_y = \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + q_{вну},$$

$$q_z = \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_{внz},$$

$$m_x = \rho J_x \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} + m_{вних},$$

$$m_y = \rho J_y \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} + m_{вну},$$

$$m_z = \rho J_z \frac{\partial^2 \Theta_z}{\partial t^2} + m_{внz},$$

(4)

где Jx, Jy, Jz – величины моментов инерции поперечного сечения стержня по OX, OУ, OZ; qxвн, qувн, qzвн, mxвн, mувн, mzвн – величины внешних сил и моментов по OX, OУ, OZ.

Использование (3), (4) и объединение уравнений Кирхгофа и Клебша, позволяет получить систему уравнений описывающих колебания пружины.

Начальные значения кривизн, внутренних сил и моментов сих для пружины определяются её геометрическими размерами при навивке, площадью поперечного сечения стержня (F). Моменты инерции пружины постоянного диаметра соответствуют экваториальным и полярному моменту инерции [2].

Внутренне моменты при колебаниях пропорциональны приращению кривизны. Возникающее при колебаниях приращение внутренней силы (Q) определяются относительным удлинением стержня (ε), модулями упругости первого (E) и второго рода (G).

Длина стержня L, из которого свита пружина, определяется её диаметром (D) количеством витков (i) и углом навивки (α).

При возникновении периодической нагрузки по OУ значение интенсивности можно определить:

$$q_{увн} = F_{vn}\, sin(\frac{2\pi}{T} t).$$

(5)

где Fvn – величина внешней силы; T – период колебаний силы.

Величины qxвн, qzвн, mxвн, mувн, mzвн от действия внешней распределенной нагрузки на пружину по OУ вращающейся системы координат равны нулю.

Использование указанных величин и запись системы уравнений в векторной форме позволяет получить:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial s} + \mathbf{AY} = \mathbf{B}\frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial t^2} + \mathbf{C},$$

(6)

где Y – вектор перемещений, кривизн и внутренних сил; A – матрица взаимосвязи; B – матрица сил инерции; C – вектор внешних, начальных сил и моментов.

Вектора Y и C записываются в виде:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Q_x^* \\ Q_y^* \\ \varepsilon \\ p^* \\ q^* \\ r^* \\ u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \psi_y \\ \Theta_z \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} Q_{yo} r_o - Q_{zo} q_o \\ F_{vn}\, sin(\frac{2\pi}{T} t) \\ 0 \\ \dfrac{Q_{yo} - M_{zo} q_o + M_{yo} r_o}{EJ} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица A имеет размер 12×12. Коэффициенты матрицы определяются выражениями:

a1 2 = - ro; a1 3 = EFqo; a1 5 = Qzo; a1 6 = - Qyo;
a2 1 = ro; a2 4 = - Qzo; a3 1 = - qo/EF; a3 4 = Qyo/EF;
a4 2 = - 1/EJ; a4 5 = (Mzo - EJro)/EJ; a4 6 = (GJoqo - Myo)/EJ;
a5 1 = 1/EJ; a5 4 = (EJro - Mzo)/EJ; a6 4 = (Myo - EJqo)/GJo;
a7 8 = - ro; a7 9 = qo; a7 11 = - 1; a8 7 = ro; a8 10 = 1;
a9 3 = - 1; a9 7 = - qo; a10 4 = - 1; a10 11 = - ro; a10 12 = qo;
a11 5 = - 1; a11 10 = ro; a12 6 = - 1; a12 10 = - qo.

Матрица B также имеет размер 12×12. Коэффициенты матрицы равны:
b1 7 = ρF; b2 8 = ρF; b3 9 = ρ/E; b4 10 = ρ/E; b5 11 = ρ/E; b6 12 = ρ/G.

Остальные коэффициенты матриц A и B равны 0.

Начальные условия для решения (8) определяются способом закрепления пружины и её начальным положением:

$$Y(0, t) = 0, \quad Y(L, t) = 0, \quad Y(s, 0) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{Y}(s,0)}{\partial t} = 0.$$

Результаты и их обсуждение. Расчет колебаний может производиться путем представления пружины в виде эквивалентного бруса, но точность определения параметров отклонений под воздействием внешних сил приблизительна. Предложенная система уравнений (6) позволит рассчитывать величины линейных и угловых перемещения пружины, по полученным величинам для отдельных участков пространственного криволинейного стержня. Уравнения позволяют определять возникающие внутренние силы и моменты сил при колебаниях.

Заключение. Приведенный в статье переход к векторной форме записи уравнений колебаний позволяет упростить форму записи и позволит применить для решения рассмотренной системы численный метод конечных элементов.

Список литературы:
1. Белый В.Д. Стержни и стержневые системы. – Омск: ОмПИ, 1979. –89 с.
2. Канинина Е.Н., Родин В.В. Моделирование механических колебаний пружины // Научно-технический вестник Поволжья. – №11. – 2019 г. – Казань: «Рашин Сайнс», 2019. – С.130 - 133.

References:
1. Bely V.D. Rods and rod systems. - Omsk: OMPI, 1979. -89 p.
2. Kaninina E.N., Rodin V.V. Modeling of mechanical oscillations of a spring // Scientific and technical bulletin of the Volga region. - No. 11. - 2019 - Kazan: «Russian Science», 2019. - P.130 - 133.