

УДК 531.011

СТАТИКА И ДИНАМИКА В ЗАДАЧАХ С ТРЕНИЕМ. ВЕДУЩЕЕ КОЛЕСО**Тарсис Екатерина Юрьевна,**кандидат технических наук, доцент кафедры математики и физики
Новосибирский Государственный Аграрный Университет
Российская Федерация, г. Новосибирск**Аннотация**

Рассмотрены два подхода к решению задачи о ведущем колесе с учетом сил трения скольжения и сопротивления качению. В первом подходе используются уравнения статики с применением предельных переходов в неравенствах, связанных с законами Амонтона-Кулона. Во втором – эта задача решена как задача динамики системы твердых тел, одно из которых – ведущее колесо совершает качение без скольжения.

Решение задачи динамики ведущего колеса и прицепа позволило обосновать условия, при которых осуществляется основной рабочий вид движения ведущего колеса – качение без скольжения, и допустимые значения вращающего момента для обеспечения этого вида движения. Показано, что максимальные значения вращающего момента в рабочем диапазоне движения зависят от сопротивления прицепа и могут существенно превосходить значения, указанные авторами упомянутых в работе источников на основании первого подхода. На конкретном примере приведены оценки различий между максимальными значениями этих моментов в пределах рабочего диапазона движения системы. Конкретизировано понятие сопротивления прицепа, которое зависит от его статических и динамических параметров, и сформулированы условия, при которых происходит буксование или пробуксовка ведущего колеса.

Ключевые слова: Ведущее колесо, трение скольжения, трение качения, статическое и динамическое решения, сопротивление прицепа, максимальный вращающий момент, качение без скольжения, буксование, пробуксовка.

STATICS AND DYNAMICS IN FRICTION PROBLEMS. A DRIVING WHEEL**Ekaterina Yu. Tarsis**PhD in techniques, associate professor,
Department of Mathematics and Physics, Novosibirsk State Agrarian University. Novosibirsk,
Russian Federation.**ABSTRACT**

Two approaches to solving the driving wheel problem with regard to sliding friction forces and rolling resistance are considered. The first approach uses static equations using limit transitions in the inequalities associated with the Amonton-Coulomb law. In the second approach,

this problem is solved as the problem of dynamics of a system of solid bodies, one of which - a driving wheel - performs rolling without sliding.

The solution of the problem on dynamics of driving wheel and trailer made it possible to substantiate the conditions under which the main working type of driving wheel motion is slipless rolling motion, and the admissible values of rotation torque to ensure this type of motion. It is shown that the maximum values of torque in the working range of motion depend on the trailer resistance and can significantly exceed the values stated on the basis of the first approach by the authors of the sources mentioned in the paper. A specific example is given to estimate the differences between the maximum values of this torque within the operating range of the system.

The concept of trailer resistance, which depends on its static and dynamic parameters, is specified and the conditions under which the driving wheel slipping or frictional sliding occurs are formulated.

Keywords: Driving wheel, sliding friction, rolling friction, static and dynamic solutions, trailer resistance, maximum torque, rolling without sliding, slipping, frictional sliding.

Введение

При изучении курса теоретической механики в технических вузах первые понятия о трении приводятся в разделе статика, который излагается традиционно перед разделом динамика. Некоторые задачи с трением формулируются и решаются методами статики. Однако во многих специфических задачах возможности статики существенно ограничены. В случаях, когда задача статики является статически неопределенной, некоторые решения могут быть получены с помощью рассмотрения предельного равновесия, при котором неравенства заменяются равенствами на основании законов Амонтона-Кулона. Такие решения, как правило, соответствуют критическому состоянию исследуемого объекта, и, следовательно, вопрос к задаче формулируется соответствующим образом. Например, в задаче 6.1 [1] во второй части можно найти только решение, соответствующее критическому состоянию. В [2,3] выводы, касающиеся задачи о ведущем колесе, сделаны авторами на основе предельных переходов в неравенствах в рамках статики. Первый вывод о максимальном значении силы тяги по сцеплению не вызывает сомнений. Однако, вывод о максимальном значении вращающего момента, который можно подвести к колесу без его пробуксовки, требует, на наш взгляд, отдельного исследования.

Более корректное и содержательное решение задачи о ведущем колесе, можно получить на основании методов динамики, поскольку основной интерес представляет движение системы, при котором ведущее колесо совершает качение без скольжения. Именно в рамках решения задачи динамики может быть сделан правильный вывод о границах изменения вращающего момента в зависимости от необходимой для обеспечения требуемого движения силы тяги.

Материал данной статьи носит скорее методический характер, представляющий интерес для авторов учебников и преподавателей теоретической механики, поскольку в специальной литературе, посвященной затронутой тематике эти вопросы наверняка решены.

1. Решение задачи о ведущем колесе в [2,3] методом статики

Ведущее колесо и транспортное средство могут двигаться по негладкой горизонтальной плоскости (см. рис. 1).

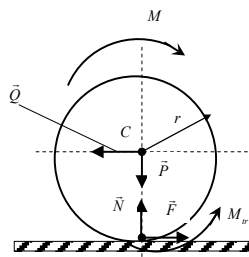


Рис.1. Расчетная модель

К ведущему колесу прикладывается пара сил с моментом M . сила \vec{Q} характеризует сопротивление транспортного средства (прицепа). Решение задачи основано на уравнениях равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad F - Q = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad P - N = 0;$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad Fr + M_{tr} - M = 0.$$

К этим уравнениям добавляются два неравенства:

$$F \leq fN; \quad M_{tr} \leq \delta N.$$

Выполняя два предельных перехода, авторы получают следующие результаты:

$$Q_{\max} = fP; \quad M_{\max} = P(fr + \delta).$$

Далее цитируем [3]: « Ведущее колесо может сообщить автомобилю силу Q_{\max} только тогда, когда к колесу будет приложен момент M_{\max} . В этом случае полностью используется максимальная сила трения скольжения $F_{\max} = fN$. При $M < M_{\max}$ сила $Q < Q_{\max}$, При $M > M_{\max}$ сила Q должна быть больше F_{\max} , что невозможно (колесо начнет буксовать); ведущее колесо может сообщить автомобилю силу, не превышающую силу трения скольжения. Такую силу называют силой тяги по сцеплению»

В приведенных формулах f коэффициент трения скольжения, а δ - трения качения. Как правило $\frac{\delta}{r} \ll f$.

Проанализируем приведенные результаты. В задаче 6.1 [1] во второй части можно найти только решение, соответствующее критическому состоянию (напомним, что в этой задаче решается вопрос о критическом значении угла наклона плиты). При уменьшении этого угла плита перестает находиться в равновесии и начинается процесс ее движения - она падает. В рамках статической постановки движение плиты, естественно, не рассматривается.

Основной функцией ведущего колеса является приведение в движение транспортного средства посредством вращающего момента, подведенного к колесу. Предпочтительным является вид движения, при котором ведущее колесо катится без скольжения. При выборе тягового средства (в данном случае ведущего колеса) необходимо обеспечить саму возможность последующего движения системы. Для этого тяговые возможности ведущего колеса (сила тяги по сцеплению) должны превосходить силу сопротивления прицепа, которую можно назвать силой статического сопротивления - Q^{st} ,

поскольку рассматривается приведение системы в движение из состояния покоя. Тогда, если создаваемая колесом сила тяги будет находиться в интервале $F_{\max} > F > Q^{st}$, центр колеса и прицеп придут в движение. Необходимый для этого вращающий момент будет меньше максимального, указанного авторами: $(fr + \delta)N > M > Q^{st}r + \delta N$. Однако при этом точка контакта колеса с дорогой будет мгновенным центром скоростей ведущего колеса. А это означает, что система ведущее колесо-прицеп начнет совершать движение, при котором колесо будет катиться без скольжения. Обеспечение именно такого вида движения и является основной задачей ведущего колеса. Остается невыясненным следующий вопрос. Существует ли такое предельное значение вращающего момента, при достижении которого колесо начнет совершать качение со скольжением (пробуксовывать)?

Ответить на этот вопрос в рамках статики невозможно. Заметим, что если $Q^{st} \geq F_{\max}$, то только тогда колесо будет буксовать при старте. Но этот тривиальный случай свидетельствует лишь о неадекватном выборе характеристик ведущего колеса по отношению к прицепу. Таким образом, решение вопроса о максимальном вращающем моменте, обеспечивающем требуемый вид движения рассматриваемой системы, может быть получено на основе динамики.

2. Решение задачи о ведущем колесе на основании уравнений динамики

Рассмотрим достаточно простой пример (см. рис. 2), в котором прицеп, имеющий массу m_p , представляет собой некоторое тело (сани с грузом), которое может скользить по негладкой плоскости. К ведущему колесу, имеющему массу m и радиус инерции относительно центра масс $C - \rho_c$, прикладывается вращающий момент M . Система включает также массы, которые движутся поступательно и приведенные к центру ведущего колеса и прицепу (например, кузов транспортного средства, двигатель и другое оборудование). Масса, приведенная к прицепу, включена в массу m_p , а масса, приведенная к центру ведущего колеса равна m_v .

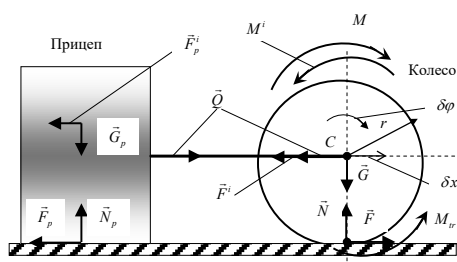


Рис.2. Расчетная модель ведущего колеса с прицепом

На ведущее колесо действуют: сила тяжести $\vec{G} = (m + m_v)\vec{g}$ и реакции плоскости: сила трения скольжения \vec{F} , момент сил трения качения M_{tr} и нормальная реакция \vec{N} . На прицеп действуют: сила тяжести $\vec{G}_p = m_p\vec{g}$ и реакции плоскости: сила трения скольжения \vec{F}_p и нормальная реакция \vec{N}_p . На рисунке также показаны силы взаимодействия \vec{Q} между колесом и прицепом.

Вначале конкретизируем понятие силы статического сопротивления прицепа - Q^{st} . Для этого рассмотрим прицеп отдельно с точки зрения статики. Уравнения равновесия прицепа при действии на него силы тяги \vec{Q} и реакций плоскости \vec{F}_p и \vec{N}_p имеют вид:

$$Q - F_p = 0;$$

$$N - m_p g = 0.$$

Третье уравнение не рассматривается, поскольку опрокидывание прицепа не предполагается. Прицеп будет находиться в равновесии до тех пор, пока сила тяги не превысит предельного значения силы трения скольжения:

$$Q \leq F_{ppr} = f_p m_p g.$$

Предельное значение этой силы и назовем силой статического сопротивления прицепа: Q^{st} . Таким образом, независимо от ведущего колеса, сила тяги Q , которая может вообще вызвать движение прицепа должна удовлетворять условию: $Q > Q^{st} = f_p m_p g$.

Теперь перейдем к динамике. Рассматриваемая система в общем случае имеет две степени свободы. Для решения задачи воспользуемся общим уравнением динамики. Выберем две обобщенные координаты: перемещение центра колеса и угол его поворота вокруг оси (вариации $\delta x, \delta \phi$ обобщенных координат см. рис. 2). Запишем общее уравнение динамики системы:

$$\delta A^a + \delta A^i = 0;$$

Вычислим элементарные работы активных сил и сил инерции:

$$\delta A^a = (M - M_{tr} - Fr) \delta \phi + (F - F_p) \delta x;$$

$$\delta A^i = -J_c \ddot{\phi} \delta \phi - (m + m_v + m_p) \dot{x} \delta x.$$

Дополнительно на рисунке (см. рис. 2) показаны также $\vec{F}^i, \vec{F}_p^i, M^i$; $|\vec{F}^i| = (m + m_v) \ddot{x}$; $|\vec{F}_p^i| = m_p \ddot{x}$; $M^i = J_c \ddot{\phi} = m \rho_c^2 \ddot{\phi}$ – силы инерции колеса и прицепа и момент сил инерции колеса.

Подставляя элементарные работы активных сил и сил инерции в общее уравнение динамики и, учитывая независимость обобщенных координат, получаем дифференциальные уравнения движения системы:

$$(m + m_v + m_p) \ddot{x} = F - F_p;$$

$$m \rho_c^2 \ddot{\phi} = M - M_{tr} - Fr;$$

При движении системы, имеем:

$$F_p = f_p m_p g; M_{tr} = \delta(m + m_v) g.$$

В результате получаем:

$$(m + m_v + m_p) \ddot{x} = F - f_p m_p g;$$

$$m \rho_c^2 \ddot{\phi} = M - \delta(m + m_v) g - Fr.$$

К полученной системе уравнений следует добавить условие:

$$F \leq f(m + m_v) g.$$

Можно сделать следующие выводы. Если сила тяги по сцеплению, создаваемая ведущим колесом, будет не больше силы статического сопротивления: $F \leq Q^{st}$, то центр

колеса и прицеп останутся в покое. Но тогда можно определить и величину вращающего момента, соответствующую случаю предельного равновесия: $M_{\max}^{st} = Q^{st}r + \delta(m + m_v)g$. Таким образом, для обеспечения качения ведущего колеса без скольжения необходимо выполнение условий:

$$Q^{st} < F_{\max} = f(m + m_v)g; \quad M > M_{\max}^{st} = Q^{st}r + \delta(m + m_v)g.$$

Замечание. Рассматриваемый пример не снижает общности поставленной задачи. Прицеп может представлять собой, например, вагон или другой транспортируемый объект. Конкретизации в этих случаях будет подлежать лишь сила статического сопротивления.

Осталось определить максимальное значение вращающего момента, при котором ведущее колесо движется без скольжения. Для этого система должна иметь одну степень свободы. Следуя логике решения задачи о качении тяжелого цилиндра [4], примем:

$$\varphi = \frac{x}{r}; \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r}.$$

Дифференциальные уравнения движения системы с учетом этого примут вид:

$$(m + m_v + m_p)\ddot{x} = F - f_p m_p g;$$

$$m\rho_c^2 \frac{\ddot{x}}{r} = M - \delta(m + m_v)g - Fr.$$

Установим зависимость вращающего момента от силы трения скольжения колеса:

$$\ddot{x} = \frac{F - f_p m_p g}{(m + m_v + m_p)}; \quad m\rho_c^2 \frac{F - f_p m_p g}{(m + m_v + m_p)r} = M - \delta(m + m_v)g - Fr;$$

$$M = m\rho_c^2 \frac{F - f_p m_p g}{(m + m_v + m_p)r} + \delta(m + m_v)g + Fr.$$

Если учесть, что величина силы трения скольжения колеса не может превышать предельного значения, то для определения максимального вращающего момента имеем:

$$\ddot{x} = \frac{f(m + m_v)g - f_p m_p g}{(m + m_v + m_p)};$$

$$M_{\max}^d = m\rho_c^2 \frac{f(m + m_v)g - f_p m_p g}{(m + m_v + m_p)r} + \delta(m + m_v)g + f(m + m_v)gr.$$

Величина этого момента, в зависимости от статических и инерционных характеристик колеса и прицепа, может значительно превосходить максимальный вращающий момент, полученный в [2,3]: $M_{[2,3]} = \delta(m + m_v)g + f(m + m_v)gr$. Величина добавки будет равна:

$$D = M_{\max}^d - M_{\max}^{[2,3]} = m\rho_c^2 \frac{f(m + m_v)g - f_p m_p g}{(m + m_v + m_p)r}.$$

Окончательно, диапазон изменения значений вращающего момента, при котором ведущее колесо будет совершать качение без скольжения, определяется выражением:

$$\delta(m + m_v)g + f_p m_p gr \leq M \leq m\rho_c^2 \frac{f(m + m_v)g - f_p m_p g}{(m + m_v + m_p)r} + \delta(m + m_v)g + f(m + m_v)gr.$$

3. Примеры и краткий анализ результатов

Приведем результаты расчетов на конкретных примерах. Параметры колеса и прицепа приведены в таблице 1.

Таблица 1. Характеристики ведущего колеса и прицепа.

вариант	$m, кг;$	$m_v, кг;$	$m_p, кг;$	$r, м$	$\rho_c, м$	f	$\delta, м$	f_p
1	500	500	500	0.4	0.4	0.2	0.002	0.005
2			10000					
3								0.05
4					0.282			
5	1000							
6		1000						
7			0					
8		0	0					

Примечания. 1) В таблице (варианты 2 –8) показаны только те величины, которые отличны от величин, приведенных в варианте 1; 2) В варианте 7 отсутствует прицеп, а в варианте 8 отсутствует прицеп и присоединенная к ведущему колесу поступательно движущаяся масса.

Определялись следующие величины:

1) ускорение центра колеса и прицепа - \ddot{x} ;

2) максимальное значение вращающего момента - M_{\max}^d ;

2) значение вращающего момента - $M_{[2,3]} = \delta(m + m_v)g + f(m + m_v)gr$;

4) силу тяги Q , действующую на прицеп: $Q = m_p \ddot{x} + f_p m_p g$;

$$k_M = \frac{M_{\max}^d}{M_{[2,3]}}$$

5) коэффициент

Результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты расчетов

вариант	$\ddot{x}, м / с^2$	$M_{\max}^d, Нм$	$M_{[2,3]}, Нм$	$Q, Н$	k_M
1	1.29	1062.3	804.1	670.1	1.32
2	0.13	830.9	804.1	1827.5	1.03
3	1.14	1032.9	804.1	817.2	1.28
4	1.29	932.5	804.1	670.1	1.16
5	1.46	1789.	1206.2	753.9	1.48
6	1.46	1497.9	1206.2	753.9	1.24
7	1.96	1196.4	804.1	0	1.49
8	1.96	794.3	402.1	0	1.98

В качестве основного варианта принят вариант 1. Остальные варианты показывают, в определенной мере, влияние основных параметров рассматриваемой системы на характеристики движущейся системы. Широкий анализ такого влияния, который можно привести на основе анализа выражения для максимального момента, не входил в нашу задачу. Остановимся только на наиболее интересных вопросах. Как видно из полученной формулы для максимального вращающего момента M_{\max}^d , его отличие от максимального момента $M_{[2,3]}$ определяется величиной:

$$D = M_{\max}^d - M_{\max}^{[2,3]} = m\rho_c^2 \frac{f(m+m_v)g - f_p m_p g}{(m+m_v+m_p)r}.$$

Соппротивление прицепа зависит от двух величин: f_p, m_p . Определим максимальные значения этих величин, при достижении которых центр колеса не сможет двигаться, а само ведущее колесо будет буксовать, если вращающий момент будет: $M > M_{[2,3]}$. Для 1-го варианта:

$$f(m+m_v)g = f_p m_p g; f_p = \frac{f(m+m_v)}{m_p} = \frac{0.2 \cdot 1000}{500} = 0.4;$$

$$m_p = \frac{f(m+m_v)}{f_p}; m_p = \frac{0.2 \cdot 1000}{0.005} = 40000 \text{ кг}.$$

Именно этими величинами и определяется наличие или отсутствие добавки D к максимальному вращающему моменту. Для 1-го варианта:

$$D > 0 \Rightarrow 0 \leq f_p \leq 0.4; 0 \leq m_p \leq 40000 \text{ кг}.$$

Теперь можно подвести краткие итоги проведенного исследования. Поскольку для приведения системы в движение значение требуемой силы тяги должно быть меньше предельного значения силы трения скольжения ведущего колеса, максимальное значение вращающего момента, обеспечивающее качение колеса без скольжения, на определенном интервале будет больше значения, указанного в [2,3]. При увеличении требуемой силы тяги максимальный вращающий момент будет в пределах стремиться к значению, указанному в [2,3]. Таким образом, из рассмотрения статической задачи мы находим только критическое состояние, как и в задаче, упомянутой в [1]. Различие состоит в том, что в нашем случае необходимо искать решение задачи в рамках динамики, где оно и должно рассматриваться. Что же касается статики, то используемые в ней предельные переходы в неравенствах не позволяют сделать корректные выводы о движении рассматриваемого объекта.

Можно указать еще один случай, когда вывод [2,3] о максимальном значении вращающего момента справедлив. Если система находилась в движении, а сила сопротивления стала увеличиваться до значения, равного максимальной силе трения скольжения ведущего колеса, то при вращающем моменте большем $M_{[2,3]}$ ведущее колесо начнет совершать качение со скольжением (пробуксовывать). Это вполне естественно, поскольку в этом случае дифференциальные уравнения будут отличаться от уравнений статики, только тем, что начальные условия будут ненулевыми.

Выводы.

1. С помощью динамического подхода к решению задачи о ведущем колесе получены более полные и точные результаты, касающиеся видов движения колеса в зависимости от стартовых условий и требуемой силы тяги.

2. Как показали исследования, значения наибольших вращающих моментов, обеспечивающих качение колеса без скольжения, могут существенно превосходить те значения, которые авторами упоминаемых источников считаются максимально возможными. Следовательно, вывод авторов [2,3] о максимальном значении вращающего момента на рабочем интервале движения системы является, по крайней мере, некорректным.

3. В учебных пособиях по теоретической механике следовало бы, на наш взгляд, указать на ограниченность применения методов статики к решению задач с учетом трения

и некоторые из них, такие, как задачу о ведущем колесе, рассматривать в разделах, посвященных динамике.

Список литературы:

1. Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. Курс теоретической механики. Том 1. Статика и кинематика. Издание третье, стереотипное. Москва «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 1979. 271 с.
2. Машиностроение. Энциклопедия в сорока томах. Том 1-2. Теоретическая механика термодинамика теплообмен. Москва «Машиностроение», 1999, 600 с.
3. Курс теоретической механики. Под редакцией К.С. Колесникова. Издание третье, стереотипное. Москва. Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2005. 735 с.
4. Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. Курс теоретической механики. Том второй . Динамика. Издание шестое, переработанное и дополненное. Москва «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 1983. 640 с.

References:

1. N.V. Butenin, YA.L. Lunc, D.R. Merkin. Kurs teoreticheskoy mekhaniki. Vol.1. Statika i kinematika. Izdanie tret'e, stereotipnoe. Moskow «Nauka». Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury. 1979. 271 p.
2. Mashinostroenie. Enciklopediya v soroka tomah. Vol.1-2. Teoreticheskaya mekhanika termodinamika teploobmen. Moskow «Mashinostroenie», 1999, 600 p.
3. Kurs teoreticheskoy mekhaniki. Pod redakciej K.S. Kolesnikova. Izdanie tret'e, stereotipnoe. Moskow. Izdatel'stvo MGTU imeni N.E. Baumana, 2005. 735 p.
4. L.G. Lojcyanskij, A.I. Lur'e. Kurs teoreticheskoy mekhaniki. Vol.2. Dinamika. Izdanie shestoe, pererabotannoe i dopolnennoe. Moskow «Nauka». Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury. 1983. 640 p.