

УДК 531.011

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ МАКСИМАЛЬНОГО МОМЕНТА ДЛЯ ВЕДУЩЕГО КОЛЕСА

Тарсис Екатерина Юрьевна,канд. техн. наук, доцент кафедры математики и физики
Новосибирский Государственный Аграрный Университет
ytarsis@mail.ru

Аннотация

Для определения диапазона значений вращающего момента на ведущем колесе, в котором колесо совершает качение без скольжения, предложено решение в рамках динамики. Показано, что решение данной задачи в рамках статики является ошибочным. Отношение действительного максимального вращающего момента к аналогичному значению, определенному методом статики в зависимости от характеристик системы находится в интервале между 1 и 2. Точное решение задачи позволяет осуществлять более рациональное и эффективное управление движением транспортных средств.

Ключевые слова: ведущее колесо, качение без скольжения, максимальный вращающий момент, трение скольжения, сопротивление качению, сила сопротивления прицепа, буксование, пробуксовка, управление движением.

TO DETERMINE THE MAXIMUM TORQUE FOR THE DRIVING WHEEL

Ekaterina Yu. Tarsis

Novosibirsk State Agrarian University

ABSTRACT

To determine the range of torque values on the drive wheel, in which the wheel rolls without slipping, a solution is proposed within the framework of dynamics. It is shown that the solution of this problem within the framework of statics is erroneous. The ratio of the actual maximum torque to a similar value determined by the static method, depending on the characteristics of the system, is in the range between 1 and 2. The exact solution of the problem allows for more rational and efficient control of the movement of vehicles.

Keywords: driving wheel, rolling without sliding, maximum torque, sliding friction, rolling resistance, trailer resistance, slipping, frictional sliding, traffic control.

Введение

В работе автора [1] было показано, что определение максимального вращающего момента на ведущем колесе транспортного средства, при котором отсутствует его буксование или пробуксовка, методами статики является ошибочным. Там же было предложено решение данной задачи в рамках динамики. Установлен диапазон изменения значений вращающего момента, подводимого к ведущему колесу, при котором осуществляется его качение без скольжения. Правая граница диапазона устанавливалась на основе решения дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения при условии, что сила трения скольжения колеса не должна превосходить ее максимального значения, установленного законами Амонтона-Кулона. Задача решена в самой общей постановке, аналогичной рассмотренной в [2,3]. Показано, что адаптация решения задачи к конкретному примеру, рассмотренному в [1], приводит к полному совпадению формул для искомого диапазона значений максимального вращающего момента в обеих постановках.

На основе полученных автором результатов показано, что решение задачи о максимальном моменте, приложенном к ведущему колесу, в рамках динамики предоставляет возможности более эффективного управления движением транспортных средств.

Напомним, что материал данной статьи носит скорее методический характер, представляющий интерес для авторов учебников и преподавателей теоретической механики, поскольку в специальной литературе, посвященной затронутой тематике эти вопросы наверняка решены.

1. Определение рабочего диапазона изменения момента

Приведем в самой общей постановке решение задачи об определении диапазона изменения вращающего момента, в котором колесо совершает качение без скольжения. Рассматривается ведущее колесо, к которому приложен вращающий момент, с транспортируемым объектом (прицепом). Система может совершать движение по негладкой горизонтальной плоскости (рис. 1).

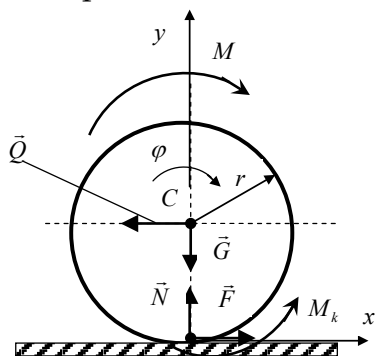


Рисунок 1 – Взаимодействие колеса с горизонтальной плоскостью

Взаимодействие колеса весом $\vec{G} = m\vec{g}$ (m – масса колеса) с прицепом выражается силой тяги $\vec{Q}$, приложенной к оси колеса; масса колеса. Движение колесу сообщает пара сил с моментом M . Сила $\vec{Q}$ в данном случае представляет сопротивление прицепа, которому ведущее колесо стремится сообщить движение. На колесо также действует сила трения скольжения $\vec{F}$ и момент сил сопротивления качению M_k . Кроме того даны: радиус колеса r , радиус инерции колеса относительно его центра ρ_c , коэффициент трения скольжения f и коэффициент сопротивления качению δ .

Поскольку нас интересует именно движение транспортного средства, причем в рабочем режиме, когда ведущее колесо совершает качение без скольжения, решение задачи следует искать в рамках динамики. В нашем случае колесо совершает плоскопараллельное движение, находясь в постоянном контакте с плоскостью. Поэтому дифференциальные уравнения движения колеса имеют вид:

$$m\ddot{x}_c = F - Q \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_c = N - G \quad (2)$$

$$mr_c^2\ddot{\phi} = M - Fr - M_k \quad (3)$$

Из (2) следует: $y_c = r$; $\ddot{y}_c = 0$; $N = G = mg$.

Дополнительно должны выполняться неравенства:

$$F \leq fN = fmg \quad (4)$$

$$M_k \leq \delta N = \delta mg \quad (5)$$

Сначала определим левую границу интервала изменения вращающего момента. Заметим, что $\ddot{x}_c \geq 0$; $\ddot{\phi} \geq 0$, поскольку активной силой является только момент, в результате действия которого возникает сила трения скольжения, направленная по оси x . Отсюда следует, что $Q \leq F \leq fmg$. Если центр колеса движется, то движение колеса может быть только качением со скольжением или без скольжения. Поступательное движение исключается, поскольку нет активной силы, направленной в сторону движения. Отсюда следует, что минимальный момент, с увеличением которого начинается движение, равен:

$$M_{\min} = Qr + \delta mg \quad (6)$$

Теперь перейдем к определению максимального значения вращающего момента, до достижения которого движение колеса является качением без скольжения. Имеется в виду, что увеличение этого значения приведет к качению со скольжением (пробуксовке). Для решения этой задачи поступим следующим образом. Поскольку ищется максимальное значение момента, то сила трения скольжения и момент сил сопротивления качению должны иметь предельные значения. Тогда дифференциальные уравнения движения переписутся так:

$$m\ddot{x}_c = fmg - Q \quad (7)$$

$$mr_c^2\ddot{\phi} = M_{\max} - fmg r - \delta mg \quad (8)$$

Предложим критерий, согласно которому колесо катится без скольжения. В этом случае скорость точки контакта колеса с плоскостью в любой момент времени движения равна нулю – эта точка является мгновенным центром скоростей колеса. Тогда имеем:

$$\dot{x}_c - \dot{\phi}r = 0; \ddot{x}_c - \ddot{\phi}r = 0 \quad (9)$$

Далее из (8) с учетом (9) определяем $\ddot{x}_c$ и затем из (7) максимальный вращающий момент:

$$M_{\max} = fmg r + \delta mg + \frac{\rho_c^2}{r} (fmg - Q) \quad (10)$$

Окончательно получаем интервал, в котором должны находиться значения вращающего момента:

$$Qr + \delta mg \leq M \leq fmg r + \delta mg + \frac{\rho_c^2}{r} (fmg - Q) \quad (11)$$

Если значения момента находятся в этом интервале, то качение ведущего колеса происходит без скольжения.

В [2,3] на основе статического подхода установлено, что $M_{\max} = fmgr + \delta mg$.

Это решение для интересующего нас диапазона является ошибочным и величина момента может превосходить указанное значение, что создает дополнительные возможности для более эффективного и рационального управления транспортным средством.

Остановимся на силе сопротивления прицепа $\vec{Q}$ более подробно. Она никоим образом не связана с ведущим колесом и его характеристиками. Если состав начинает движение из состояния покоя, то сила сопротивления носит статический характер. Для того, чтобы прицеп можно было привести в движение необходимо выполнение условия: $Q < fmg$. В противном случае прицеп останется неподвижным, а ведущее колесо либо также будет неподвижно, либо будет буксовать на месте. Но это лишает смысла всю задачу транспортировки и свидетельствует о необходимости замены тягового средства. Сила сопротивления может меняться и в процессе движения. Это может быть связано, в частности, с торможением или с сопротивлением воздуха, зависящим от скорости движения. Тогда условия меняются в процессе движения и может наступить ситуация, когда $Q = fmg$. И только в этом случае $M_{\max} = fmgr + \delta mg$ и при его увеличении ведущее колесо будет катиться со скольжением – пробуксовывать. Можно указать максимальную величину отношения значения действительного максимального момента к $M_{\max} = fmgr + \delta mg$.

Пусть сила сопротивления прицепа равна нулю. Тогда

$$M_{\max} = fmgr + \delta mg + \frac{\rho_c^2}{r} fmg$$

$$r_c \gg r; \frac{d}{r} \ll f$$

Если к тому же принять: , то это отношение будет приближаться к 2.

2. Результаты некоторых исследований и их анализ

Проанализируем, какие значения может принимать отношение максимального вращающего момента к максимальному моменту, приведенному в [2,3]. Это отношение зависит, во-первых, от статического сопротивления прицепа, а во-вторых, от характеристик ведущего колеса и присоединенной к нему поступательно движущейся массы (цепного веса), а также от коэффициентов трения скольжения и качения. Наибольшего значения это отношение достигается при отсутствии прицепа и при отсутствии присоединенной к ведущему колесу поступательно движущейся массы. В работе [1] был дан ряд примеров. Дополнительные результаты сравнения при отсутствии прицепа приведены в таблице 1.

Таблица 1 –

Результаты расчёта отношения максимального вращающего момента к максимальному моменту [2,3]

Вариант	m , кг	m_v , кг	ρ_c , м	r , м	f	δ , м	k	$F_{\max}$ [2,3], Н
1	500	10000	0.2	0.2	0.1	0.005	1.038	10300.5
2	500	1000	0.2	0.2	0.1	0.005	1.267	1471.5
3	500	0	0.2	0.2	0.1	0.005	1.8	490.5
4	500	0	0.2	0.2	0.1	0.0005	1.976	490.5
5	500	0	0.2	0.2	0.1	0	2.0	490.5

На основании проведенных исследований можно утверждать следующее.

1. Величина максимального момента по [2,3] формально соответствует истине только в двух случаях: 1) когда статическое сопротивление прицепа не позволяет привести систему в движение и ведущее колесо буксует (этот случай лишен смысла); 2) когда происходит торможение или возрастает сила сопротивления среды во время движения. В этом случае ведущее колесо пробуксовывает (катится со скольжением). Такое решение не соответствует действительности на всем интересующем нас рабочем диапазоне движения, что не позволяет эффективно управлять движением транспортного средства за счет рационального выбора режима задания вращающего момента.

2. Следует отметить (варианты 1, 2 таблицы 1), что на величину k существенное влияние оказывает присоединенная к ведущему колесу поступательно движущаяся масса, обеспечивающая сцепной вес. Чем больше сцепной вес, тем ближе этот коэффициент к 1. Кроме того, с увеличением сцепного веса растут тяговые возможности ведущего колеса. Это актуально, например, для локомотива железнодорожного транспорта, где для увеличения сцепного веса может быть даже использован балласт. Несмотря на то, что при большом сцепном весе тяговые возможности ведущего колеса существенно возрастают, а коэффициент k стремится к 1, это не оправдывает использование не корректного теоретического решения.

3. При отсутствии прицепа или очень малом его статическом сопротивлении, а также малой присоединенной к колесу массе, обсуждаемый коэффициент в большей мере зависит от сопротивления качению и приближается к 2 (варианты 3-5 таблицы 1). Эти случаи в большей мере можно отнести к автомобилям и мотоциклам (особенно гоночным), где эффективность управления может иметь большое значение.

В любом случае выводы, приведенные в [2,3] в части касающейся максимального момента, который может быть подведен к ведущему колесу без его буксования и пробуксовки являются в целом неверными. Потому в учебной литературе рассматриваемый вопрос, на наш взгляд, следовало бы изъять из раздела статики и при необходимости поместить в раздел динамики, где ему и следует находиться.

Выводы

1. В рамках уравнений динамики получено решение задачи об определении диапазона изменения вращающего момента для ведущего колеса, совершающего качение без скольжения;
2. Корректное решение задачи позволяет осуществлять более рациональное и эффективное управление движением транспортных средств.
3. В учебных пособиях по теоретической механике следовало бы, на наш взгляд, отметить ограниченность применения методов статики к решению задач с учетом трения и некоторые из них, например, задачу о ведущем колесе, рассматривать в разделах, посвященных динамике.

Список литературы:

1. Тарсис Е.Ю. Статика и динамика в задачах с трением. Ведущее колесо. Научно-практический электронный журнал. Оригинальные исследования. 2022. №7. С. 91-99.
2. Машиностроение. Энциклопедия в сорока томах. Том 1-2. Теоретическая механика термодинамика теплообмен. Москва «Машиностроение», 1999, 600 с.

3. Курс теоретической механики. Под редакцией К.С. Колесникова. 5-е издание, исправленное. Москва. Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2017. 580 с.

References:

1. Tarsis E.Yu. Statics and dynamics in problems with friction. Driving wheel. Scientific and practical electronic journal. Original research. 2022. No. 7. pp. 91–99.
2. Mashinostroenie. Enciklopediya v soroka tomah. Vol.1-2. Teoreticheskaya mekhanika termodinamika teploobmen. Moskow «Mashinostroenie», 1999, 600 p.
3. Kurs teoreticheskoy mekhaniki. Pod redakciej K.S. Kolesnikova. Izdanie tret'e, stereotipnoe. Moskow. Izdatel'stvo MGTU imeni N.E. Baumana, 2017. 580 p.