

УДК 531.011

ВЕДОМОЕ КОЛЕСО. АНАЛИЗ ВИДОВ ДВИЖЕНИЯ**Тарсис Екатерина Юрьевна,**канд. техн. наук, доцент кафедры математики и физики
Новосибирский Государственный Аграрный Университет
ytarsis@mail.ru**Аннотация**

Анализируются виды движений ведомого колеса в зависимости от силы тяги, а также характеристик колеса и дороги (определяются) на основе динамики. Показано, что некоторые выводы, полученные на основе статического подхода, являются ошибочными. Работа ориентирована на преподавателей курса теоретической механики и студентов вузов, поскольку в специальных дисциплинах подобные задачи наверняка решаются надлежащим образом.

Ключевые слова: ведомое колесо, анализ видов движения, сила тяги, трение скольжения, сопротивление качению, качение без скольжения, качение со скольжением, поступательное движение.

THE DRIVEN WHEEL. THE ANALYSIS OF THE TYPES OF MOTION**Tarsis Ekaterina Yurievna,**Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics and
Physics
Novosibirsk State Agrarian University**ABSTRACT**

The types of movements of the driven wheel depending on the traction force, as well as the characteristics of the wheel and the road are analyzed (determined) on the basis of dynamics. It is shown that some conclusions obtained on the basis of the static approach are erroneous. The work is aimed at teachers of the course of theoretical mechanics and students of higher education institutions, since in special disciplines such tasks are certainly solved properly.

Keywords: driven wheel, analysis of types of movement, traction force, sliding friction, rolling resistance, rolling without sliding, rolling with sliding, forward motion.

Введение

Внимание автора привлекли отдельные задачи, излагаемые в некоторых учебных пособиях по курсу теоретической механики для студентов вузов. Речь идет о

задачах, где на основе статики делаются выводы о движении тел. На эти тела наряду с активными силами действуют реакции неидеальных связей, к которым относятся силы трения скольжения и моменты сил сопротивления качению. Поведение этих реакций описывается на основании законов Амонтона-Кулона с помощью соответствующих неравенств. Основной особенностью этих реакций является то, что при нарушении условий равновесия тела они продолжают действовать на уже движущееся тело, сохраняя при этом свои предельные значения. Но изучение последующего движения тела уже не может являться задачей статики, и некоторые ее выводы могут оказаться ошибочными или, по крайней мере, ограниченно верными. Это касается, например, задачи о максимальном вращающем моменте на ведущем колесе, при котором оно катится без скольжения [1,2] или о поведении ведомого колеса [3]. Ошибочность отдельных выводов в работах [1,2] была показана в статье автора [4]. Вместе с тем в учебной литературе имеются примеры корректного и безупречного решения подобных задач. На основе положений динамики в учебном пособии [5] рассмотрена задача о качении тяжелого цилиндра по негладкой наклонной плоскости с учетом трения скольжения и сопротивления качению. Выводы, полученные авторами, никаким образом не могут быть сделаны на основе статики. В настоящей работе с позиции динамики исследуется движение ведомого колеса. Работа ориентирована на преподавателей курса теоретической механики и студентов вузов, поскольку в специальных дисциплинах подобные задачи наверняка решаются надлежащим образом.

1. Постановка задачи

Рассматривается движение ведомого колеса, которое приводится в движение силой тяги, приложенной в его центре и параллельной дороге (горизонтальной негладкой плоскости). Кроме этого, на колесо действуют: сила тяжести колеса \vec{P} , нормальная реакция плоскости \vec{N} , трения скольжения \vec{F} , момент сил сопротивления качению \vec{M} . Данные используемые при исследовании: $m = \frac{P}{g}$ – масса колеса, r, ρ_c – радиус колеса и радиус его инерции относительно центра, f, δ – коэффициент трения скольжения и коэффициент сопротивления качению. Необходимо провести исследование движения и равновесия колеса в зависимости от заданных характеристик. Расчетная схема приведена на рисунке 1.

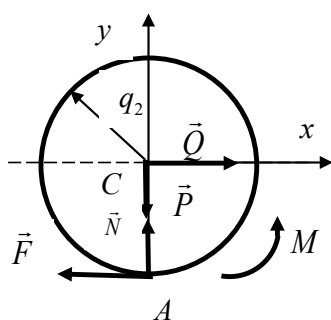


Рисунок 1

Рассматриваемое колесо, находящееся в постоянном контакте с плоскостью, может совершать плоскопараллельное движение и имеет, в общем случае, две степени свободы. Дифференциальные уравнения движения колеса можно записать в виде:

$$m\ddot{x}_c = Q - F \quad (1)$$

$$m\rho_c^2\ddot{\varphi} = Fr - M \quad (2)$$

Первое выражает теорему о движении центра масс в абсолютном движении, а второе – теорему об изменении кинетического момента, в относительном движении относительно центра масс. Эта теорема, как доказано, записывается для центра масс так же, как если бы

центр масс был неподвижной точкой. Уравнения (1) и (2) следует дополнить двумя неравенствами, вытекающими из законов Амонтона - Кулона:

$$F \leq fN = fP \quad (3)$$

$$M \leq \delta N = \delta P \quad (4)$$

В зависимости от силы тяги Q и, как мы увидим далее, от соотношения между коэффициентами f и δ колесо может совершать следующие виды движения: 1) поступательное движение; 2) качение без скольжения; 3) качение со скольжением. Потому вначале определим условия, необходимые для реализации каждого вида движения, а затем разрешающие уравнения данного вида движения.

2. Анализ движения

2.1. Поступательное движение. Поступательное движение означает, что колесо движется относительно дороги и не вращается. А это означает, что контакт колеса с дорогой осуществляется в одной и той же точке и колесо скользит. Поэтому одним из условий является замена неравенства (3) равенством: $F = fP$. Далее, при поступательном движении колесо не вращается и, следовательно, $\dot{\varphi} = 0$. Тогда уравнения движения приобретают вид:

$$m\ddot{x}_c = Q - fP, \quad fPr - M = 0$$

Выясним условия, при выполнении которых такое движение возможно. Для того, чтобы центр колеса пришел в движение необходимо выполнение условия $Q > fP$. Второе уравнение не содержит ускорений и является, по сути, уравнением равновесия для моментов, из которого следует, что $M = fPr$. Заметим, что при $M > fPr$ угловое ускорение стало бы отрицательным, что противоречит характеру возможного движения, поскольку отсутствует момент активных сил относительно центра колеса. Условия, при которых колесо будет совершать поступательное движение, имеют вид: $f \leq \frac{\delta}{r}$; $Q > fP$.

Заметим, что никаких ограничений сверху на величину силы тяги, при выполнении последнего условия нет, и поэтому поступательное движение сохранится при любом сколь угодно большом ее значении. В учебном пособии [3] утверждается, что поступательное движение переходит в качение со скольжением при условии, что $Q \geq \frac{\delta}{r}P$. Покажем, что это утверждение неверно. Пусть колесо уже совершает поступательное движение. Тогда при значении силы тяги $Q > fP$ колесо скользит, не вращаясь, и его угловое ускорение равно $\dot{\varphi} = 0$, а сила трения скольжения максимальна $F = fP$. Тогда первое дифференциальное

уравнение следует записать так: $m\ddot{x}_c = Q - fP$. Величину момента сил сопротивления качению можно для любого момента времени определить с помощью принципа Даламбера. Запишем выражение равенства нулю суммы моментов активных сил и сил инерции относительно точки А (заметим, что точка может быть выбрана произвольно). При поступательном движении колесо не вращается и поэтому к колесу в центре масс приложен главный вектор сил инерции колеса и сила тяги, а в точке А сила трения скольжения и момент сил сопротивления качению. Запишем уравнение:

$$\mathbf{e} M_A(F_k^e) + \mathbf{e} M_A(\dot{F}_k^i) = Qr - m\ddot{x}_c r - M = 0$$

Значение $m\ddot{x}_c$ получим из первого уравнения движения: $m\ddot{x}_c = Q - fP$. Отсюда и определяется значение момента сил сопротивления качению для любого момента времени движения колеса: $M = fPr$. Теперь окончательно видно, что и при движении эта реакция не зависит от силы тяги. А поскольку момент сил сопротивления качению не превосходит предельного, качение наступить не может.

Подведем итоги данного подраздела.

1) условиями для того, чтобы колесо совершало поступательное движение, являются:

$$Q > fP, \quad \frac{d}{r} < f \quad (5)$$

2) уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x}_c = Q - fP \quad (6)$$

3) поступательное движение при любом значении силы тяги, необходимой для начала движения не переходит в другой вид движения после выхода из положения равновесия.

2.2. Качение без скольжения. Качение без скольжения означает, что точка контакта колеса с дорогой является мгновенным центром скоростей колеса при плоскопараллельном движении. Но тогда сила трения скольжения должна удовлетворять неравенству $F < fmg$, а момент сил сопротивления качения равенству $M = dmg$. Уравнения движения примут вид:

$$m\ddot{x}_c = Q - F, \quad mr_c^2 \ddot{\varphi} = Fr - dP$$

Колесо при этом имеет одну степень свободы и выполняется равенство:

$$\dot{x}_c = r\dot{\varphi}, \quad \ddot{x}_c = r\ddot{\varphi}$$

Но в этом случае система уравнений для описания качения без скольжения будет иметь следующий вид:

$$m\ddot{x}_c = Q - F, \quad mr_c^2 \frac{\ddot{x}_c}{r} = Fr - dP$$

Мы получили систему двух уравнений относительно ускорения центра колеса и силы трения скольжения. Решаем эту систему.

$$\ddot{x}_c = \frac{Qr^2 - dPr}{m(r^2 + r_c^2)}, \quad F = Q - m\ddot{x}_c = Q - \frac{Qr^2 - dPr}{(r^2 + r_c^2)}$$

Остается определить значение силы тяги Q , до достижения которого и происходит качение без скольжения. Для этого должно быть выполнено условие (3):

$F = Q - \frac{Qr^2 - dPr}{(r^2 + r_c^2)} < fP$, откуда и будет найден интервал значений, в котором должна находиться сила тяги, чтобы колесо катилось без скольжения:

$$\frac{d}{r}P < Q \left(f - \frac{d}{r} \right) \frac{r^2}{r_c^2} + f \frac{P}{E}$$

Можно привести еще один способ установления интервала для силы тяги. Если первый способ определял внутреннюю правую границу этого интервала, то этот устанавливает критическое значение силы, после увеличения которого, начинается качение со скольжением. Положим, что и сила трения скольжения, и момент сил сопротивления качению равны предельным значениям. Тогда уравнения движения запишутся следующим образом:

$$m\ddot{x}_c = Q - fP, \quad mr_c^2 \frac{\ddot{x}_c}{r} = fPr - dP$$

$$Q = P \left(f - \frac{d}{r} \right) \frac{r^2}{r_c^2} + f \frac{P}{E}$$

Исключая ускорение центра колеса, сразу получаем:

Как видно, результаты совпадают.

Следует обратить внимание на то, что качение без скольжения возможно только при

выполнении условия $\frac{d}{r} < f$. Если это условие выполняется, то критическое значение силы

тяги определяется неравенством $Q < P \left(f - \frac{d}{r} \right) \frac{r^2}{r_c^2} + f \frac{J}{r^2}$. Если же это условие не выполняется, то, как следует из предыдущего подраздела, колесо может совершать только поступательное движение.

Подведем итоги данного подраздела.

1) условиями для того, чтобы колесо совершало качение без скольжения, являются:

$$\frac{d}{r} < f \tag{2.2.1}$$

$$\frac{d}{r} P < Q \left(f - \frac{d}{r} \right) \frac{r^2}{r_c^2} + f \frac{J}{r^2} \tag{2.2.2}$$

2) уравнения движения имеют вид:

$$m \ddot{x} = Q - F \tag{2.2.3}$$

$$m r_c^2 \frac{\ddot{\alpha}}{r} = F r - d m g \tag{2.2.4}$$

3) ускорения и сила трения скольжения равны:

$$\ddot{x} = \frac{Q r^2 - d P r}{m(r^2 + r_c^2)}, \quad j = \frac{\ddot{\alpha}}{r} \tag{2.2.5}$$

$$F = Q - \frac{Q r^2 - d P r}{(r^2 + r_c^2)} = Q \frac{r_c^2}{(r^2 + r_c^2)} - \frac{r^2}{(r^2 + r_c^2)} \frac{d P}{r} \tag{2.2.6}$$

2.3. Качение со скольжением. Качение со скольжением означает, что точка контакта колеса с дорогой скользит относительно последней, но при этом колесо вращается. В этом случае сила трения скольжения должна удовлетворять равенству: $F = f m g$ а момент сил сопротивления качения равенству - $M = d m g$. Уравнения движения примут вид:

$$m \ddot{x} = Q - f P, \quad m r_c^2 \ddot{\alpha} = f P r - d P$$

Проанализируем эти уравнения.

1) Для того, чтобы колесо вращалось при отсутствии момента активных сил

относительно его центра необходимо выполнение условия: $f P r > d P, \quad f > \frac{d}{r}$.

2) Для движения центра колеса должно выполняться условие: $Q > f P$.

3) Но первые два условия не полностью отражают рассматриваемое движение. Формальное решение этой системы уравнений может противоречить характеру движения - качению со скольжением. Необходимо еще, чтобы точка контакта колеса с дорогой «скользила» относительно дороги в направлении движения. Определим скорость этой точки по формуле: $v_A = \dot{x} - j r$. Дифференцируя это выражение получаем: $\dot{v}_A = \ddot{x} - j r$. Характер рассматриваемого движения требует выполнения еще одного условия: $\dot{v}_A > 0$. Тогда, определяя из второго уравнения угловое ускорение, а из первого ускорение центра

$$\frac{Q - fP}{m} - \frac{fPr - dP}{mr_c^2} > 0$$

колеса, имеем: . Отсюда и следует условие для силы тяги:

$Q > P \left(f - \frac{d}{r} \right) \frac{r^2}{r_c^2} + f \frac{P}{r_c}$. Заметим, что начальное значение для силы тяги должно быть больше конечного значения интервала для силы тяги при качении без скольжения (см. подраздел 2.2).

Подведем итоги данного подраздела.

1) условиями для того, чтобы колесо совершало качение со скольжением, являются:

$$\frac{d}{r} < f \tag{2.3.1}$$

$$Q > P \left(f - \frac{d}{r} \right) \frac{r^2}{r_c^2} + f \frac{P}{r_c} \tag{2.3.2}$$

2) уравнения движения имеют вид:

$$m \ddot{x} = Q - fP \tag{2.3.3}$$

$$mr_c^2 \ddot{\varphi} = fPr - dP \tag{2.3.4}$$

3) ускорения определяются по формулам (2.3.3) и (2.3.4), а остальные кинематические характеристики движения определяются интегрированием.

В заключение раздела приведем две таблицы. Таблица 2.1. содержит условия, при которых осуществляются различные виды движения колеса на основе статики [3], а таблица 2.2. – на основе динамики.

Таблица 2.1. Условия для видов движения на основе статики

качение без скольжения	качение со скольжением	поступательное движение
$\frac{d}{r} < f; fP > Q; \frac{d}{r} < P$	$\frac{d}{r} < f; Q < fP;$ $\frac{d}{r} > f; Q < \frac{d}{r}P;$ $\frac{d}{r} = f; Q < \frac{d}{r}P = fP$	$\frac{d}{r} < f; \frac{d}{r}P > Q > fP$

Таблица 2.2. Условия для видов движения на основе динамики

качение без скольжения	качение со скольжением	поступательное движение
$\frac{d}{r} < f; \frac{d}{r}P < Q < P \left(f - \frac{d}{r} \right) \frac{r^2}{r_c^2}$	$\frac{d}{r} < f; Q > P \left(f - \frac{d}{r} \right) \frac{r^2}{r_c^2}$	$\frac{d}{r} < f; Q > f$

3. Примеры и их анализ

Приведем примеры расчетов различных видов движения ведомого колеса в зависимости от силы тяги, а также характеристик колеса и дороги. Приведенные примеры носят иллюстративный характер и не претендуют на полное исследование. Расчеты проведем при следующих значениях основных исходных данных:

$m = 50 \text{ кг}; r = 0.25 \text{ м}; f = 0.1$. Время движения составляет 10 с. Остальные данные Q, r_c, d варьируются в зависимости от вида движения и целей расчетов.

3.1. Качение без скольжения. Расчеты проведены для следующих значений

$$r_c = \frac{r}{\sqrt{2}} \text{ м}, d = 0.005 \text{ м}$$

варьируемых данных: $Q_{\min} = 9.81 \text{ Н}; Q_{\max} = 127.48 \text{ Н}$. Левое и правое значение интервала для силы тяги по формуле (2.2.2) составили:

Для статики левое значение интервала совпадает с полученным значением для динамики $Q_{\min}^{st} = 9.81 \text{ Н}$, а правое равно: $Q_{\max}^{st} = 49.03 \text{ Н}$. Затем принималось: $r_c = r \text{ м}, d = 0.005 \text{ м}$. Правое значение интервала для силы тяги по формуле (2.2.2) составило: $Q_{\max} = 88.26 \text{ Н}$.

Радиус инерции в первом случае соответствует однородному цилиндру, а во втором – масса распределена по ободу колеса. Для силы тяги равной 80Н изменялось значение коэффициента сопротивления качению: $d = 0.009 \text{ м}$. Правое значение интервала для силы

$$r_c = \frac{r}{\sqrt{2}} \text{ м}, d = 0.009 \text{ м}$$

тяги по формуле (2.2.2) составило для $r_c = r \text{ м}, d = 0.009 \text{ м}$ – 111.8 Н, а для $r_c = r \text{ м}, d = 0.009 \text{ м}$ – 80.41 Н. Результаты расчетов приведены в таблице 3.1.1.

Таблица 3.1.1.

$r_c, d \text{ м}$	Q , Н	ω_c м/с ²	$\dot{\omega}$ рад/с ²	F Н	F_{\max} , Н	x_1 м
$r / \sqrt{2}, 0.005$	4 0	0.40 3	1.6 1	19.8 7	49.0 3	20. 1
$r, 0.005$	4 0	0.30 2	1.2 1	24.9 0	49.0 3	15. 1
$r / \sqrt{2}, 0.005$	6 0	0.66 9	2.6 8	26.5 4	49.0 3	33. 5
$r, 0.005$	6 0	0.50 2	2.0 1	34.9 0	49.0 3	25. 1
$r / \sqrt{2}, 0.005$	8 0	0.93 6	3.7 4	33.2	49.0 3	46. 8
$r, 0.005$	8 0	0.70 2	2.8 1	44.0 3	49.0 3	35. 1
$r / \sqrt{2}, 0.009$	8 0	0.83 1	3.3 3	38.4 3	49.0 3	41. 6
$r, 0.009 \text{ м}$	8 0	0.62 3	2.4 9	48.8 2	49.0 3	31. 2

3.2. Качение со скольжением. Вначале примем следующие варьируемые данные: $\delta = 0.005 \text{ м}; \rho_c = \frac{r}{\sqrt{2}} \text{ м}$. Определяем минимальное значение силы тяги по формуле (2.3.2):

$$Q > P \left(f - \frac{d}{r} \right) \frac{r^2}{r_c^2} + f \frac{Q}{P} 127.48 \text{ Н}$$

. Для статики минимальное значение силы тяги:

$$\frac{d}{r} < f; Q_i f P = 49.03 \text{ Н}$$

. Изменим радиус инерции колеса относительно центра: $r_c = r$. Определяем минимальное значение силы тяги по формуле (2.3.2):

$$Q > P_{\text{КЛ}} \left(f - \frac{d}{r} \right) \frac{r^2}{r_c^2} + f \frac{\text{Щ}}{\text{БВ}} 88.256$$

Н. Результаты расчетов для значений силы тяги 130Н и 200Н при различных значениях радиуса инерции приведем в таблице 3.2.1.

Таблица 3.2.1.

$r_{c, \text{м}}$	$Q, \text{Н}$	$\omega_c, \text{м/с}^2$	$j\omega, \text{рад/с}^2$	$\omega_A = \omega_c j\omega, \text{м/с}^2$	$x_1, \text{м}$
$r / \sqrt{2}$	130	1.619	6.276	0.0504	81
r	130	1.619	3.138	0.835	81
$r / \sqrt{2}$	200	3.019	6.276	1.45	151
r	200	3.019	3.138	2.235	151

3.3. Поступательное движение. Расчеты проведем при следующих значениях исходных данных: $m = 50; r = 0.25; f = 0.1$ для значений силы тяги: 80Н, 130Н, 200Н, первая из которых использовалась при расчете качения без скольжения, а две другие при расчетах качения со скольжением.

Результаты приведены в таблице 3.3.1.

Таблица 3.3.1.

$Q, \text{Н}$	$\omega_c, \text{м/с}$	$x_1, \text{м}$
80	0.619	31
130	1.619	81
200	3.019	151

Теперь можно провести анализ полученных результатов.

При рассмотрении качения без скольжения (см. таблицу 3.1.1) можно видеть:

1) во всех рассмотренных случаях интервал для значений силы тяги не совпадает с интервалом, приведенным в таблице 2.1. Правое значение интервала зависит от

соотношений: $f, \frac{d}{r}$ и $\frac{r^2}{r_c^2}$. Оно может существенно превышать значение, указанное в статике;

2) при качении без скольжения кинематические характеристики движения центра колеса зависят от инерционной характеристики вращательного движения - радиуса инерции колеса относительно центра и от коэффициента сопротивления качению. Критерием этого вида движения является сила трения скольжения, которая не превышает предельного значения.

Качение со скольжением может наступить только при выполнении условий:

$$fPr > dP; f > \frac{d}{r} \quad \text{и} \quad Q > P_{\text{КЛ}} \left(f - \frac{d}{r} \right) \frac{r^2}{r_c^2} + f \frac{\text{Щ}}{\text{БВ}}$$

. Значение силы тяги, необходимой для реализации того вида движения, соответствует правому значению диапазона, в пределах которого реализуется качение без скольжения. Это можно трактовать следующим образом. При монотонном увеличении силы тяги вначале из положения равновесия колесо переходит в режим качения без скольжения, а затем в режим качения со скольжением. Далее можно утверждать:

1) от величин f, d, r_c зависит только величина силы тяги, которая необходима для реализации качения со скольжением;

2) кинематические характеристики движения центра колеса зависят только от предельной величины силы трения скольжения и массы колеса (см. уравнение 2.3.3) и не зависят от остальных характеристик, входящих в определение углового ускорения колеса (см. уравнение 2.3.4). Таким образом, вращательная часть движения описывается автономным уравнением и не влияет на поступательную часть.

Поступательное движение может наступить только при выполнении условий $f J \frac{d}{r}$ и $Q > fP$. Следовательно, вывод, приведенный без доказательства в [3] о том, что

поступательное движение происходит при условиях $\frac{d}{r} > f; \frac{d}{r} P > Q > fP$, не соответствует действительности, поскольку переход от поступательного движения к качению со скольжением невозможен.

Если сравнить результаты расчетов при качении со скольжением и при поступательном движении (см. таблицы 3.2.1 и 3.3.1), то можно увидеть, что кинематические характеристики центра колеса одинаковы. Это естественно, поскольку в обоих видах движения уравнения, определяющие движение центра колеса одни и те же. Действительно, движения различны. Но это связано с соотношением между коэффициентами трения скольжения и сопротивления качению. Поэтому и уравнения движения различны.

Объяснению независимости движения центра колеса при качении со скольжением и при поступательном движении можно придать энергетическую форму. Применим теорему об изменении кинетической энергии к поступательному движению.

$$T = T^{post} = m \frac{v_c^2}{2}.$$

Кинетическая энергия в любой момент времени равна:

Кинетическая энергия при качении со скольжением в любой момент времени равна:

$$T = T^{post} + T^{vr} = m \frac{v_c^2}{2} + m r_c^2 \frac{j^2}{2}.$$

Сумма полных работ внешних и внутренних сил на соответствующих перемещениях точек их приложения для поступательного движения равна: $A = (Q - fP)x_c$.

Для качения со скольжением:

$$A = Qx_c - fP(x_c - j r) - dPj = (Q - fP)x_c + (fPr - dj) = A^{post} + A^{vr}.$$

После разделения полной работы на поступательную и вращательную части можно утверждать, что: $T^{post} = A^{post}; T^{vr} = A^{vr}$.

Проверка показала, что для поступательного движения и качения со скольжением все приведенные энергетические зависимости для одной и той же силы тяги выполняются. Однако, следует иметь в виду, что диапазоны сил тяги, необходимые для обеспечения этих видов движения не совпадают.

Выводы

1. Установлены критерии определения вида движения ведомого колеса. Корректное решение этой задачи возможно только в рамках динамики;

2. Инерционные характеристики вращательного движения колеса влияют на движение его центра только при качении без скольжения;

3. При поступательном движении и качении со скольжением движение центра колеса одинаково.

Список литературы:

1. Курс теоретической механики. Под редакцией К.С. Колесникова. 5- издание, исправленное. Москва. Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2017. 580 с.
2. Машиностроение. Энциклопедия в сорока томах. Том 1-2. Теоретическая механика термодинамика теплообмен. Москва «Машиностроение», 1999, 600 с.
3. Н.Н. Никитин. Курс теоретической механики. Издание пятое. Переработанное и дополненное. Москва «Высшая школа». 1990. 607 с.
4. Тарсис Е.Ю. Статика и динамика в задачах с трением. Ведущее колесо. Научно-практический электронный журнал. Оригинальные исследования (ОРИС). 2022. №7. с. 91-99.
5. Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. Курс теоретической механики. Том второй. Динамика. Издание шестое, переработанное и дополненное. Москва «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 1983. 640 с.

References:

1. Course of theoretical mechanics. Edited by K.S. Kolesnikova. 5th edition, revised. Moscow. Publishing house of Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, 2017. 580 p.
2. Mechanical engineering. Encyclopedia in forty volumes. Volume 1-2. Theoretical mechanics thermodynamics heat transfer. Moscow "Mechanical Engineering", 1999, 600 p.
3. N.N. Nikitin. Course of theoretical mechanics. Fifth edition. Revised and expanded. Moscow "Higher School". 1990. 607 p.
4. Tarsis E.Yu. Statics and dynamics in problems with friction. Drive wheel. Scientific and practical electronic journal. Original research (ORIS). 2022. No. 7. With. 91-99.
5. L.G. Loitsyansky, A.I. Lurie. Course of theoretical mechanics. Volume two. Dynamics. Sixth edition, revised and expanded. Moscow "Science". Main editorial office of physical and mathematical literature. 1983. 640 p.