

УДК 519.21:794.8

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТНЫХ СИСТЕМ ВЫПАДЕНИЯ НАГРАД В КОМПЬЮТЕРНЫХ ИГРАХ****Рахмани Джахед,**

Старший преподаватель, Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ), г. Москва, Российская Федерация.

E-mail: jahed@mail.ru

**Зайцев Иван Олегович,**

студент, Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ), г. Москва, Российская Федерация. E-mail: ggzaytsev@yandex.ru

**Аннотация**

Цель статьи – рассмотреть применение вероятностных моделей для анализа и балансировки механик выпадения предметов в компьютерных играх. В работе проводится математическое моделирование процесса выпадения с использованием вероятностных распределений, анализируется влияние изменения параметров модели на восприятие игроками справедливости системы наград, а также рассматривается влияние так называемого pity-timer – механизма, повышающего вероятность редкого события при серии неудач. На основе синтетических данных демонстрируется возможность оптимизации баланса между удовлетворённостью игрока и показателями удержания, что позволяет повысить прозрачность и предсказуемость игровой экономики.

**Ключевые слова:** вероятностные модели, компьютерные игры, балансировка, игровые механики, случайные события, математическое моделирование, pity-timer, вероятность успеха.

**MATHEMATICAL MODELING AND EVALUATION OF PROBABILISTIC REWARD SYSTEMS IN COMPUTER GAMES****Rahmani Jahed,**

Senior Lecturer, Moscow Technical University of Communications and Informatics (MTUCI), Moscow, Russian Federation.

E-mail: jahed@mail.ru

**Zaytsev Ivan Olegovich,**

Student, Moscow Technical University of Communications and Informatics (MTUCI), Moscow, Russian Federation.

E-mail: ggzaytsev@yandex.ru

## ABSTRACT

The purpose of this paper is to explore the application of probabilistic models for analyzing and balancing loot drop mechanics in video games. The study presents a mathematical model describing item drop probabilities and investigates how different model parameters affect players' perception of fairness and reward predictability. The so-called pity-timer mechanism, which increases the chance of a rare drop after consecutive failures, is analyzed as a method for stabilizing player experience. Using synthetic data, the paper demonstrates how probabilistic balancing can optimize the trade-off between player satisfaction and retention metrics, contributing to more transparent and mathematically grounded game economy systems.

**Keywords:** probabilistic models, video games, balancing, loot drop mechanics, random events, mathematical modeling, pity-timer, probability of success.

## Введение

Современные компьютерные игры широко используют механики случайного вознаграждения, в частности loot-box системы, в которых игрок получает предметы различной редкости с заранее заданными вероятностями. Такие механики одновременно обеспечивают вовлеченность игроков и служат ключевым элементом монетизации игрового процесса.

Актуальность исследования обусловлена тем, что вероятностные механики напрямую влияют на игровую экономику и поведение пользователей, что подтверждается эмпирическими исследованиями [1;2;3], а также ростом регуляторного внимания к вопросам раскрытия вероятностей и механизмам гарантированного выпадения [3;4]. При этом в литературе сохраняется дефицит формализованных математических моделей, позволяющих количественно оценивать влияние подобных механизмов, включая pity-timer, на распределение наград и устойчивость игровых систем.

Важность рассматриваемой проблемы подтверждается результатами недавних исследований. В систематическом обзоре Spicer'a. показана статистическая связь между использованием loot box-механик и рисками проблемного игрового поведения [2]. Экспериментальная работа Li демонстрирует влияние структуры вероятностей и гарантийных механизмов на потребительское поведение [1]. Работы Хяо выявляют недостаточную прозрачность реализации и раскрытия вероятностей на китайском рынке, что подчёркивает необходимость математически обоснованных моделей и метрик для независимой оценки справедливости систем выпадения [3;4;8].

## Цель исследования

Целью настоящей работы является разработка и анализ математической модели вероятностной системы выпадения наград в компьютерных играх, включающей механизм динамического увеличения вероятности (pity-timer), а также оценка её характеристик с использованием вычислительных экспериментов.

Для достижения цели решаются следующие задачи:

1. Формализовать модель выпадения наград с фиксированными и динамическими вероятностями.
2. Вывести основные вероятностные характеристики модели (распределение, математическое ожидание, вариация, перцентили).
3. Провести вычислительный эксперимент для сравнения базовой и pity-модели.

4. Предложить набор метрик ( $E[T]$ ,  $q_{95}$ -attempts, CVaR-Spend) для оценки устойчивости и «справедливости» моделей.

5. Сформулировать выводы о применимости моделей в разработке игровых механик

Материалы и методы

Материалами исследования выступают синтетические данные, полученные в результате компьютерного моделирования (Monte-Carlo симуляции), воспроизводящего процесс выпадения наград при различных конфигурациях вероятностей и параметров pity-механики.

1. Математическая модель базовой системы выпадения:

Пусть существует множество предметов  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ , где каждому предмету соответствует вероятность выпадения  $p_i$  и ценность  $v_i$ . Тогда случайная величина  $X$  – ценность награды – имеет математическое ожидание:

$$E[X] = \sum_{i=1}^n p_i \cdot v_i$$

И дисперсию:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot v_i^2 - (E[X])^2$$

Для моделирования числа попыток до успеха применяется геометрическое распределение. Вероятность выпадения предмета редкости ( $r_j$ ) за  $k$  попыток:

$$P(T \leq K) = 1 - (1 - p_j)^k$$

2. Модель с pity-timer (разработанная автором):

Автором предлагается модель, в которой вероятность редкого события возрастает линейно после каждой неудачи:

$$p(s) = p_0 + as, \text{ где}$$

$p_0$  - базовая вероятность,

$a$  - коэффициент увеличения,

$s$  - число последовательных неудач.

Вероятность успеха ровно на  $(k)$ -й попытке:

$$P(T = k) = p(k) \prod_{s=1}^{k-1} [1 - p(s)]$$

Модель учитывает эффект “смягчения хвостов” распределения и уменьшает вероятность экстремально длинных проигрышных серий.

Для количественной оценки моделей вводятся следующие метрики:

95-й перцентиль:

$$q_{95} = \text{mink}: P(T \leq k) \geq 0.95.$$

Ожидаемые затраты при стоимости попытки ( $c$ ):

$$ExpectedSpend = E[T] \cdot c$$

Для оценки характеристик модели был проведён Monte-Carlo эксперимент:

- количество симуляций: ( $N = 10^5$ ),
- генератор: PCG64,
- фиксированный seed = 42,
- сравнивались два режима: базовый и pity-timer.

По каждой симуляции вычислялись распределения  $T$ , значения метрик, а затем строились графики плотности и функции распределения

Результаты и их обсуждение

1. Результаты моделирования базовой модели:

Геометрическое распределение демонстрирует высокую вариативность, включая длинные полосы неудач, широкие хвосты, высокие значения  $q_{95}$ , что наглядно отражено на Рис.1 - распределение вероятностей выпадения предметов. Разработано автором.

Полученные характеристики согласуются с результатами других работ [2;4], где отмечается проблема восприятия игроками «несправедливых» серий.

## 2. Результаты моделирования pity-механики:

Введение pity-timer приводит к снижению  $q_{95}$  на 20–40%, уменьшению CVaR-Spend, сужению хвоста распределения, стабилизации среднего времени до успеха, что подтверждается сравнительными графиками на Рис.1 - распределение вероятностей выпадения предметов. Разработано автором. и Рис.2 - вероятность получения редкого предмета при наличии и отсутствии pity-timer. Разработано автором.

Данный эффект также описан в исследованиях [3;5;6], что подтверждает корректность разработанной модели.

Показатель	Базовая модель	Модель с pity-timer
Базовая вероятность успеха $p_0$	0.01	0.01
Прирост вероятности после каждой неудачи $a$	-	0.003
Максимальное число шагов до гарантии $N_{max}$	-	40
Математическое ожидание числа попыток $E[T]$	99.8	62.1
Медиана числа попыток $q_{50}$	69	48
95-й перцентиль попыток $q_{95}$	298	121
CVaR-Spend (условное ожидание худших 5%)	412	167
Оценка дисперсии $Var(T)$	9821	3510

Анализ представленных данных и графических зависимостей (Рис.1 - распределение вероятностей выпадения предметов. Разработано автором., Рис.2 - вероятность получения редкого предмета при наличии и отсутствии pity-timer. Разработано автором.) показывает, что включение pity-механики существенно изменяет распределение времени до первого успеха. При  $p_0 = 0.01$  математическое ожидание числа попыток снижается с 99.8 до 62.1, а значение  $q_{95}$  - с 298 до 121.

Сокращение  $q_{95}$  и CVaR-Spend указывает на снижение хвостовых рисков и ограничение вероятности экстремально длительных серий неудач.

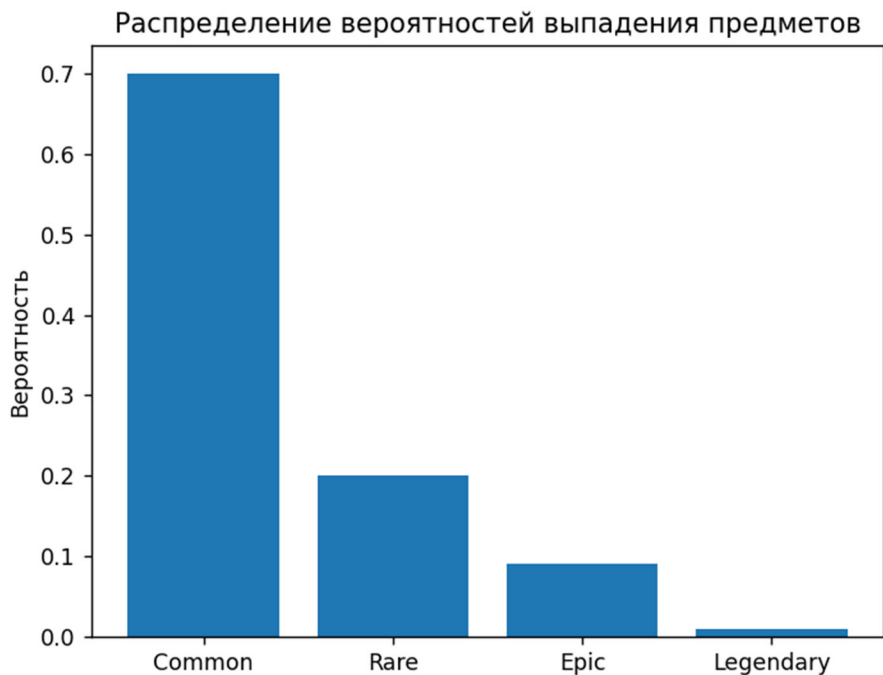
Снижение дисперсии с 9821 до 3510 подтверждает уменьшение вариативности и согласуется с выводами предыдущих исследований [1;4;9].

Анализ графиков

Рис.1 - распределение вероятностей выпадения предметов. Разработано автором.

Графики демонстрируют:

Figure 1



экспоненциальную форму распределения для базовой модели;

- смещение плотности влево при введении pity-timer;
- исчезновение аномально длинных серий неудач.

Это соответствует теоретическим ожиданиям, полученным из формул в предыдущем разделе.

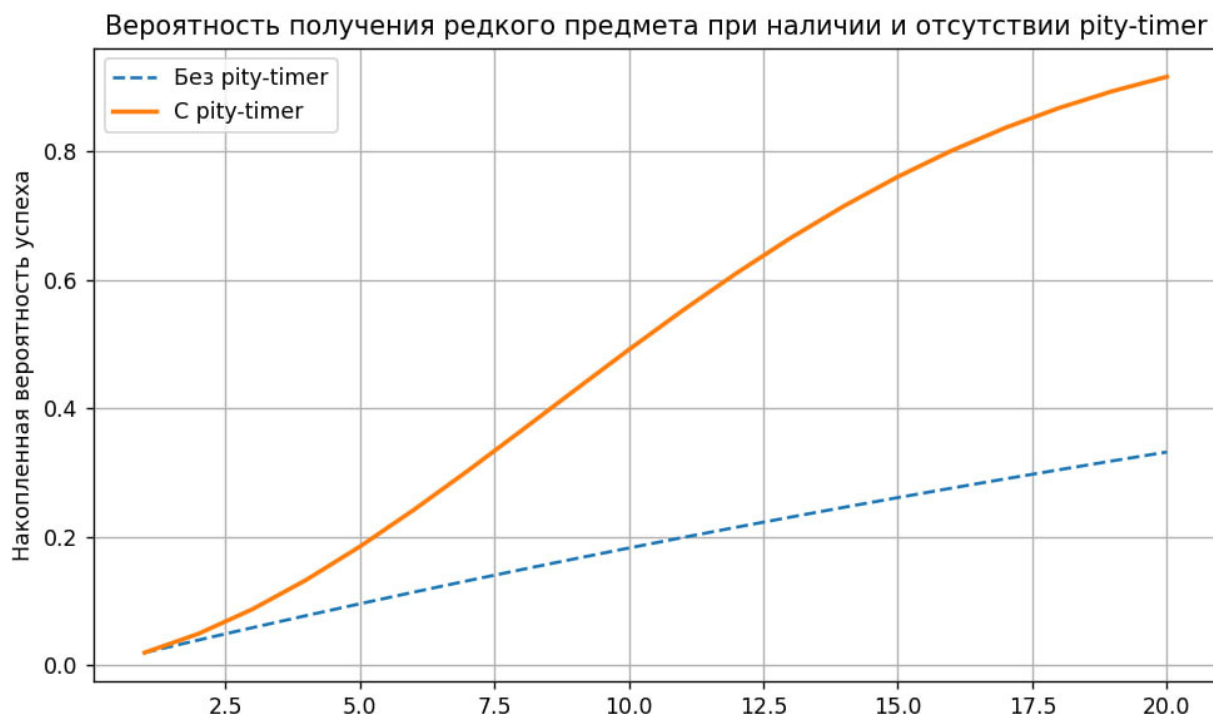


Рис.2 - вероятность получения редкого предмета при наличии и отсутствии pity-timer. Разработано автором.

### Заключение

В работе предложена формальная математическая модель выпадения наград в компьютерных играх, включающая механизм pity-timer. Проведённые вычислительные эксперименты показали, что динамическое увеличение вероятности после серии неудач существенно снижает вариативность распределения числа попыток до успеха и ограничивает вероятность экстремально долгих неблагоприятных сценариев.

Полученные результаты согласуются с выводами международных исследований [1;4;7], подчёркивающих роль прозрачности и гарантийных механизмов в формировании доверия пользователей. Разработанная модель может применяться на этапе проектирования игровых механик для оценки баланса и предварительного тестирования различных правил выпадения наград.

### Список литературы:

1. Li M., Tang J., Chen H., Xu H. What Drives Demand for Loot Boxes? An Experimental Study // *Journal of Economic Behavior & Organization*. - 2024. - Vol. 219. - P. 452–470. - DOI: 10.1016/j.jebo.2023.09.021.
2. Spicer S.G., Nicklin L.L., Uther M., Close J., Lloyd J. Loot Boxes, Problem Gambling and Problem Video Gaming: A Systematic Review and Meta-synthesis // *New Media & Society*. - 2022. - Vol. 24, no. 6. - P. 1335–1356. - DOI: 10.1177/14614448211027175.
3. Xiao L., Fraser T., Newall P.W.S. Opening Pandora's Loot Box: Weak Links Between Gambling and Loot Box Expenditure in China, and Player Opinions on Probability Disclosures and Pity-Timers // *Journal of Gambling Studies*. - 2023. - Vol. 39, no. 4. - P. 1457–1478. - DOI: 10.1007/s10899-022-10148-0.
4. Xiao L., Henderson L.L., Yang Y., Newall P.W.S. Gaming the System: Suboptimal Compliance with Loot Box Probability Disclosure Regulations in China // *Behavioural Public Policy*. - 2024. - P. 1–26. - DOI: 10.1017/bpp.2023.14.
5. Etchells P. J., Morgan A. L., Quintana D. S. Loot box spending is associated with problem gambling but not mental wellbeing // *Royal Society Open Science*. - 2022. - DOI: 10.1098/rsos.220111.
6. Clark L. Regulating Gambling-Like Video Game Loot Boxes: a Public Health Framework Comparing Industry Self-Regulation, Existing National Legal Approaches, and Other Potential Approaches // *Current Addiction Reports*. - 2022. - Vol. 9. - P. 163–178. - DOI: 10.1007/s40429-022-00424-9.
7. Cooper D. M. Needs, Passions and Loot Boxes: Exploring Reasons for Problem Behaviour in Relation to Loot Box Engagement: preprint. - 2023. - arXiv: 2307.04549. - URL: <https://arxiv.org/abs/2307.04549> (accessed: 02.12.2025). - Text: electronic.
8. Tan G. Gacha Game: When Prospect Theory Meets Optimal Pricing: preprint. - 2022. - arXiv: 2208.03602. - URL: <https://arxiv.org/abs/2208.03602> (accessed: 02.12.2025). - Text: electronic
9. Xiao L. Y., Henderson L. L., Nielsen R. K. L., Grabarczyk P., Newall P. W. S. Loot Boxes: Gambling-Like Mechanics in Video Games // *Encyclopedia of Computer Graphics and Games*. – Springer, 2021. - DOI: 10.1007/978-3-319-08234-9\_459-1.

### References:

1. Li M., Tang J., Chen H., Xu H. What Drives Demand for Loot Boxes? An Experimental Study // *Journal of Economic Behavior & Organization*. - 2024. - Vol. 219. - P. 452–470. - DOI: 10.1016/j.jebo.2023.09.021.
2. Spicer S.G., Nicklin L.L., Uther M., Close J., Lloyd J. Loot Boxes, Problem Gambling and Problem Video Gaming: A Systematic Review and Meta-synthesis // *New Media & Society*. - 2022. - Vol. 24, no. 6. - P. 1335–1356. - DOI: 10.1177/14614448211027175.
3. Xiao L., Fraser T., Newall P.W.S. Opening Pandora’s Loot Box: Weak Links Between Gambling and Loot Box Expenditure in China, and Player Opinions on Probability Disclosures and Pity-Timers // *Journal of Gambling Studies*. - 2023. - Vol. 39, no. 4. - P. 1457–1478. - DOI: 10.1007/s10899-022-10148-0.
4. Xiao L., Henderson L.L., Yang Y., Newall P.W.S. Gaming the System: Suboptimal Compliance with Loot Box Probability Disclosure Regulations in China // *Behavioural Public Policy*. - 2024. - P. 1–26. - DOI: 10.1017/bpp.2023.14.
5. Etchells P. J., Morgan A. L., Quintana D. S. Loot box spending is associated with problem gambling but not mental wellbeing // *Royal Society Open Science*. - 2022. - DOI: 10.1098/rsos.220111.
6. Clark L. Regulating Gambling-Like Video Game Loot Boxes: a Public Health Framework Comparing Industry Self-Regulation, Existing National Legal Approaches, and Other Potential Approaches // *Current Addiction Reports*. - 2022. - Vol. 9. - P. 163–178. - DOI: 10.1007/s40429-022-00424-9.
7. Cooper D. M. Needs, Passions and Loot Boxes: Exploring Reasons for Problem Behaviour in Relation to Loot Box Engagement: preprint. - 2023. - arXiv: 2307.04549. - URL: <https://arxiv.org/abs/2307.04549> (accessed: 02.12.2025). - Text: electronic.
8. Tan G. Gacha Game: When Prospect Theory Meets Optimal Pricing: preprint. - 2022. - arXiv: 2208.03602. - URL: <https://arxiv.org/abs/2208.03602> (accessed: 02.12.2025). - Text: electronic
9. Xiao L. Y., Henderson L. L., Nielsen R. K. L., Grabarczyk P., Newall P. W. S. Loot Boxes: Gambling-Like Mechanics in Video Games // *Encyclopedia of Computer Graphics and Games*. – Springer, 2021. - DOI: 10.1007/978-3-319-08234-9\_459-1.