

УДК 621.394.343

**ОПТИМИЗАЦИЯ РЕКУРСИВНЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА КАНАЛЬНОГО
РЕСУРСА ПО МОДЕЛИ ЭРЛАНГА В МУЛЬТИСЕРВИСНЫХ СЕТЯХ****Фарис Фархад Асаад Фарис,**

Студент магистратуры

2 курс, факультет «Сети и системы связи»

Кафедра «Сетей связи и систем коммутации»

Московский технический университет связи и информатики

e-mail: farhadfaris981@gmail.com

Аннотация

В данной статье предложен оптимизированный рекурсивный алгоритм определения минимального числа каналов связи (или эквивалентной пропускной способности линии) при заданном ограничении на долю потерянных заявок. Метод основан на классической модели Эрланга В и ее обобщении для мультисервисного трафика. Показано, что использование частичных нормированных вероятностей для состояний с максимальной нагрузкой позволяет сократить вычислительную сложность без потери точности. Приведен численный пример, иллюстрирующий сходимость алгоритма и влияние скорости линии на вероятность отказа.

Ключевые слова: телетрафик; модель Эрланга В; рекуррентные вычисления; вероятность отказа; мультисервисная сеть.

**OPTIMIZATION OF RECURSIVE ERLANG-BASED CHANNEL RESOURCE
CALCULATION IN MULTISERVICE NETWORKS****Faris Farhad Asaad Faris,**

Master's student

2nd year, Faculty of Networks and Communication Systems

Department of Communication Networks and Switching Systems

Moscow Technical University of Communications and Informatics

ABSTRACT

This article proposes an optimised recursive algorithm is presented for determining the minimum number of traffic channels (or the equivalent link bit-rate) that satisfies a target blocking probability. The approach is based on the classical Erlang B model and its extension to multi-service traffic. By keeping only the normalised probabilities of the most highly loaded states, the computational effort is substantially reduced while preserving accuracy. A numerical example demonstrates the convergence of the algorithm and the relationship between link capacity and blocking probability.

Keywords: teletraffic; Erlang B model; recursive computation; blocking probability; multiservice network.

Введение

В последние два десятилетия мультисервисные сети связи развиваются по экспоненте – от классических телефонных станций до полностью конвергентных платформ NGN/5G. Услуги с различными требованиями к полосе пропускания и задержкам (VoIP, потоковое видео, IoT-телеметрия) передаются по одному и тому же транспортному стеку, что предъявляет особо строгие требования к расчету канальных ресурсов и уровню качества обслуживания (QoS). Ключевую методологическую основу таких расчетов составляют рекомендации ITU-T серии E, где модель Эрланга-В закреплена как базовый инструмент телетрафика¹.

Классическая теория телетрафика и ее современное развитие подробно освещены в монографиях В. Иверсена, где показана роль рекуррентных формул в проектировании крупных сетей доступа и магистралей [1]. Для российской инженерной школы фундаментальный вклад внесли С. Н. Степанов и соавторы: в учебных курсах и специализированных изданиях сформулированы принципы моделирования коммуникационных систем, адаптированные к условиям цифровой конвергенции [2, 3].

Практические вопросы интеграции транспортных и абонентских сегментов раскрыты в работах В. Ю. Деарта, где обосновываются подходы к нормированию пропускной способности в IP-MPLS / DWDM-ядре и на линиях доступа [4]. Эволюция сетей следующего поколения (NGN), предусматривающая унификацию сетевых функций и развитие виртуализации, анализируется А. В. Росляковым, делая акцент на требованиях соблюдения заданной вероятности отказа в условиях динамического распределения ресурсов [5]. Современные стохастические модели мультисервисного трафика и их применение к оценке QoS систематизированы в пособии В. А. Наумова, К. Е. Самуйлова и Н. В. Яржиной [6].

Целью данной работы является определить минимальное количество каналов ν (или эквивалентную пропускную способность линии), обеспечивающее ограничение на долю потерянных заявок $\pi_{\text{норм}}$. Исходные данные при этом – это интенсивность входного трафика a (или набор a_k для мультисервисного случая) и норматив по качеству обслуживания.

Классическая модель Эрланга В и рекурсивная форма

Будем считать, что искомым параметром является целое число каналов ν . Для решения задачи воспользуемся моделью Эрланга, позволяющей определять долю необслуженных заявок на основе функции $E(\nu, a)$. Эта функция, согласно исходному определению, задается формулой:

$$E(\nu, a) = \frac{a^\nu / \nu!}{1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^\nu}{\nu!}} \quad (1)$$

Но для проведения вычислений $E(\nu, a)$ необходимо привести к такому виду:

$$E(\nu, a) = \frac{\frac{a^\nu}{\nu!}}{1 + a + \dots + \frac{a^\nu}{\nu!}} = \frac{\frac{a^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \times \frac{a}{\nu}}{\left[1 + a + \dots + \frac{a^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\right] + \frac{a^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \times \frac{a}{\nu}} \quad (2)$$

Чтобы получить рекурсию для оценки величины $E(\nu, a)$ необходимо числитель и знаменатель поделить на выражение в $[\cdot]$ и заменить ν на r . Рекурсия ведется по числу каналов. При реализации рекурсии используются только нормированные вероятности:

¹ ITU-T Rec. E.490.1: Overview of Recommendations on Traffic Engineering. — 01/2003.

$$E(r, a) = \frac{aE(r-1, a)}{r + aE(r-1, a)}, r = 1, 2, \dots, v, (E(0, a) = 1) \quad (3)$$

При первом выполнении неравенства можно найти требуемое число каналов v :

$$\frac{aE(r-1, a)}{r + aE(r-1, a)} \leq \pi, \quad r = 1, 2, \dots, v. \quad (4)$$

Оптимизированный рекурсивный алгоритм

Для контроля уровня потерь и проведения рекурсивных шагов достаточно иметь данные о вероятности состояния, в котором задействовано максимальное число единиц ресурса. Если на некотором этапе значение $E(r, a)$ уже известно, то можно при необходимости начать вычисления не с $r = 0$, а с некоторого промежуточного значения $r < v$.

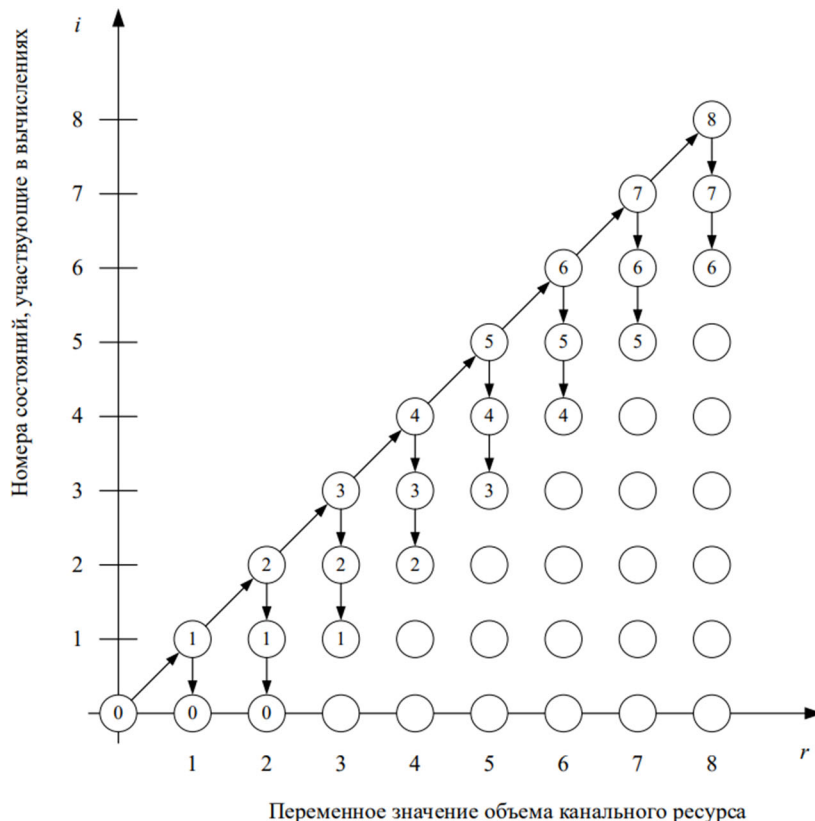


Рисунок 1. Реализация оптимизированного алгоритма, начиная с $r = 0$

На рисунке 1 представлена алгоритмическая схема рекурсивного процесса, начинающегося с исходного значения $r = 0$. Это означает, что в самом начале считается, что в распоряжении системы нет доступных единиц ресурса, и постепенно их количество возрастает вплоть до тех пор, пока не будет достигнут требуемый критерий качества обслуживания (например, заданная доля отказов). На каждом шаге вычисляются лишь необходимые вероятности, характеризующие наиболее загруженные состояния системы, что позволяет существенно сокращать вычислительные затраты. Когда установленный порог качества достигнут или превышен, процесс останавливается, и текущее значение r считается искомым количеством единиц ресурса.

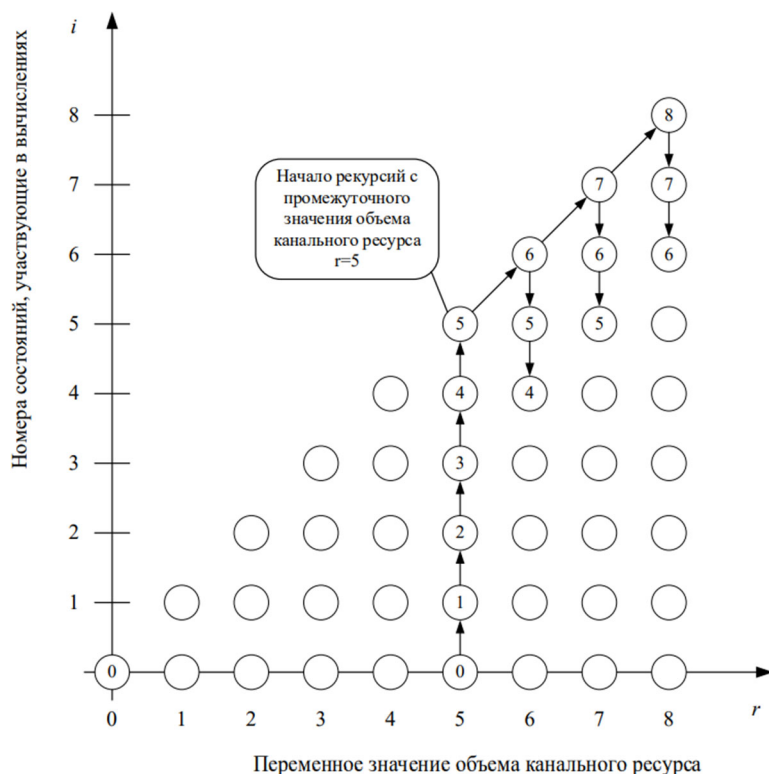


Рисунок 2. Реализация оптимизированного алгоритма, начиная с промежуточного значения $r = 5$

На рисунке 2 показан вариант той же процедуры, однако здесь стартовое значение выбирается равным $r = 5$. Это более эффективная стратегия, если заранее известно, что для надлежащего уровня качества необходимо как минимум несколько единиц ресурса. Смысл такого подхода в том, что мы «пропускаем» начальные значения r от 0 до 4, экономя тем самым время на вычислениях, и сразу начинаем рекурсивный процесс с некоторого промежуточного уровня ресурса. В ряде случаев начальное значение $E(r, a)$ (например, вероятность отказа) может быть предварительно определено аналитически или получено из других источников (включая результаты детального баланса), что позволяет более гибко выбирать r для старта рекурсии.

Оптимальный выбор начальных условий – будь то $r = 0$, $r = 5$ или иное значение – зависит от специфики задачи и исходных параметров (интенсивность входного потока заявок, требуемые ресурсы, заданные критерии качества и проч.). Если заранее известно, что даже несколько единиц ресурса могут оказаться недостаточными, имеет смысл начинать с более высокого уровня r . Если же точных предположений нет, удобнее вести рекурсию с $r = 0$, чтобы гарантированно перебрать все возможные варианты снизу вверх.

Обобщение на мультисервисный трафик

Рассмотрим оценку ресурса для мультисервисной модели Эрланга. Пусть $P_s(i)$ обозначает ненормированную вероятность занятости i единиц ресурса линии при их общем числе s . Предположим, что

$$b = \max_{1 \leq k \leq n} b_k \tag{5}$$

Число единиц ресурса возьмем равным $(r - 1)$. Используя рекурсию:

$$P(i) = \frac{1}{i} \times \sum_{k=1}^n a_k b_k P(i - b_k) \tag{6}$$

выразим ненормированные вероятности $P(i)$ через $P(0)$. Таким образом найдем значения $P_{r-1}(0), P_{r-1}(1), \dots, P_{r-1}(r - 1)$. Нормировка дает вероятности $p_{r-1}(0), p_{r-1}(1), \dots, p_{r-1}(r - 1)$. Далее рассчитываем потери. Если же анализируемого числа

единиц ресурса оказывается недостаточно, то увеличиваем это число на единицу (до r) и повторяем расчеты. Для вычисления потерь при общем числе единиц ресурса $r, r + 1, \dots$ и выполнения следующего шага алгоритма достаточно знать значения b стационарных вероятностей состояний с максимальным числом занятых единиц ресурса. Ниже приведены рекуррентные выражения для расчета соответствующих вероятностей.

Увеличим число единиц ресурса линии до r и найдем величины $P_r(i), i = 0, 1, \dots, r$. Из соотношения $P_r(0) = p_{r-1}(0)$ выберем начальное значение рекурсии и получим следующие результаты:

$$P_r(0) = p_{r-1}(0), \quad P_r(1) = p_{r-1}(1),$$

$$\dots$$

$$P_{r-1}(r-1) = p_{r-1}(r-1),$$

$$P_r(r) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^n a_k b_k P_r(r-b_k) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^n a_k b_k p_r(r-b_k).$$

Найдем $p_r(r)$, выполнив нормировку:

$$p_r(r) = \frac{P_r(r)}{P_r(0) + P_r(1) + \dots + P_r(r-1) + P_r(r)} = \frac{P_r(r)}{p_{r-1}(0) + p_{r-1}(1) + \dots + p_{r-1}(r-1) + P_r(r)}$$

$$= \frac{P_r(r)}{1 + P_r(r)}$$

Используя значения b вероятностей $p_{r-1}(i)$, соответствующих максимальному числу занятых единиц ресурса, найдем формулу для вычисления $p_r(r)$, используя уже полученное выражение для $P_r(r)$:

$$p_r(r) = \frac{\frac{1}{r} \sum_{k=1}^n a_k b_k p_{r-1}(r-b_k)}{1 + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^n a_k b_k p_{r-1}(r-b_k)} \quad (7)$$

После нормировки, из аналогичных соотношений находятся значения вероятностей $p_r(r-1), \dots, p_r(r-b+1)$:

$$p_r(i) = \frac{p_{r-1}(i)}{1 + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^n a_k b_k p_{r-1}(r-b_k)}, \quad i = r-1, r-2, \dots, r-b+1 \quad (8)$$

Полученные значения вероятностей $p_r(i), i = r, r-1, \dots, r-b+1$ как раз и позволяют определить долю потерянных заявок. Если же заданный уровень потерь не достигнут, то аналогичным образом рассчитывается следующий набор из b вероятностей $p_{r+1}(i)$ с максимальным числом занятых единиц ресурса. Действия продолжают до тех пор, пока не будет получено окончательное решение задачи.

Таким образом, полученный набор рекурсий позволит перейти к практической оценке требуемого ресурса, что продемонстрируем на численном примере далее.

Численный пример и результаты моделирования

Рассмотрим последовательность определения v :

Положим $P(0) = 1$.

Находим $\min(b, r+1)$ нормированных значений вероятностей $p_r(i), i = r, r-1, \dots, \max(r-b+1, 0)$ для каждого фиксированного $r = 1, 2, \dots$, используя следующие соотношения:

$$p_r(r) = \frac{r-1}{1+(r-1)}, \quad i = r;$$

$$p_r(i) = \frac{p_{r-1}(i)}{1+(r-1)}, \quad i = r-1, r-2, \dots, \max(r-b+1, 0),$$

Где:

$$S_{r-1} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^n a_k b_k p_{r-1}(r-b_k) \quad (9)$$

Рассчитываем некоторый функционал (например, максимальную долю потерь заявок)

$$\pi = \sum_{i=r-b+1}^r p_r(i) \quad (10)$$

и сравниваем его с нормативным значением. При необходимости повторяем вычисления.

Рассмотренный выше алгоритм дает возможность вести рекурсию по числу доступных единиц ресурса линии.

Приведем численный пример, в котором требуется найти минимальную скорость линии, при которой входящие потоки заявок обслуживаются с долей потерянных заявок, не превышающей 0,018. Результаты промежуточных вычислений потерь можно представить графически.

Результаты промежуточных вычислений и график зависимости доли потерянных заявок от скорости линии приведены на рисунке 3.

r	S _{r-1}	Pr(r)	Pr(r-1)	Pr(r-2)	Pr(r-3)	Pr(r-4)	π1	π2
0		1					1	1
1	0	0	1				1	1
2	2,5	0,714286	0	0,285714			0,714286	1
3	0	0	0,714286	0	0,285714		0,714286	1
4	0,892857	0,471698	0	0,377358	0	0,150943	0,471698	1
5	0,226415	0,184615	0,384615	0	0,307692	0	0,569231	0,876923
6	0,320513	0,242718	0,139806	0,291262	0	0,23301	0,382524	0,906796
7	0,349515	0,258993	0,179856	0,103597	0,215827	0	0,438849	0,758273
8	0,11241	0,101051	0,232821	0,161681	0,093129	0,194018	0,333872	0,7827
9	0,291027	0,225423	0,078272	0,180338	0,125235	0,072135	0,303694	0,681403
10	0,093237	0,085286	0,206197	0,071596	0,164958	0,114554	0,291483	0,642591
11	0,171831	0,146635	0,07278	0,175962	0,061098	0,140769	0,219414	0,597243
12	0,118306	0,10579	0,131122	0,06508	0,157347	0,054634	0,236912	0,513974
13	0,081951	0,075744	0,097777	0,12119	0,060151	0,145429	0,173521	0,500291
14	0,112829	0,101389	0,068064	0,087864	0,108903	0,054052	0,169453	0,420272
15	0,049714	0,04736	0,096587	0,064841	0,083702	0,103745	0,143947	0,396236
16	0,078814	0,073056	0,0439	0,089531	0,060104	0,077587	0,116956	0,344178
17	0,047141	0,045019	0,069767	0,041924	0,0855	0,057398	0,114787	0,299609
18	0,043296	0,041499	0,043151	0,066872	0,040184	0,081952	0,08465	0,273658
19	0,043705	0,041875	0,039761	0,041344	0,064072	0,038501	0,081636	0,225553
20	0,024378	0,023798	0,040878	0,038815	0,04036	0,062547	0,064676	0,206399
21	0,032071	0,031075	0,023059	0,039608	0,037609	0,039106	0,054133	0,170456
22	0,018572	0,018234	0,030508	0,022638	0,038886	0,036923	0,048741	0,147189
23	0,018672	0,01833	0,017899	0,029949	0,022223	0,038173	0,036229	0,126574
24	0,015658	0,015417	0,018047	0,017623	0,029487	0,021881	0,033464	0,102455
25	0,010174	0,010071	0,015261	0,017866	0,017446	0,02919	0,025333	0,089834
26	0,011355	0,011228	0,009958	0,01509	0,017665	0,01725	0,021186	0,071191
27	0,006636	0,006592	0,011154	0,009892	0,014991	0,017549	0,017746	0,060177
28	0,006692	0,006648	0,006548	0,011079	0,009827	0,014891	0,013196	0,048993
29	0,00498	0,004955	0,006615	0,006516	0,011025	0,009778	0,01157	0,038889
30	0,003547	0,003534	0,004938	0,006591	0,006493	0,010986	0,008472	0,032542
31	0,003454	0,003442	0,003522	0,004921	0,006569	0,00647	0,006965	0,024925
32	0,002067	0,002063	0,003435	0,003515	0,004911	0,006555	0,005498	0,020479
33	0,00201	0,002006	0,002058	0,003428	0,003508	0,004901	0,004065	0,015902
34	0,001384	0,001382	0,002004	0,002056	0,003424	0,003503	0,003385	0,012368

Рисунок 3. Промежуточные вычисления

На рисунке 3 приводятся результаты пошаговых вычислений по рекурсивному алгоритму для различных значений r : указываются промежуточные ненормированные вероятности занятости канала $P_r(\cdot)$, их нормированные аналоги $p_r(\cdot)$, вспомогательная величина S_{r-1} (формула (9)), а также доля потерянных заявок π (по формуле (4.10)). Эти

данные наглядно показывают, при каком r достигается требуемый уровень качества обслуживания.

На рисунке 4 представлена зависимость доли потерянных заявок π_2 от скорости линии, выраженной в условных единицах (к.е.). По оси абсцисс отложено значение скорости r , по оси ординат – соответствующее значение π_2 . Из графика следует, что с ростом r доля потерь заметно снижается: в районе малых r π_2 близка к единице, а при достижении больших значений скорости стремится к нулю.

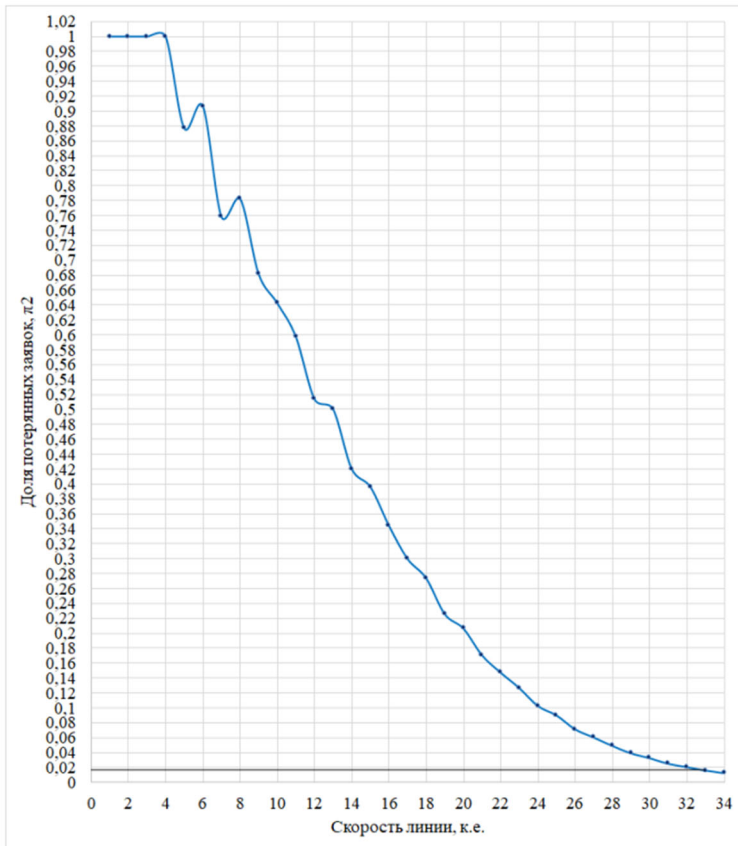


Рисунок 4. Зависимость доли потерянных заявок от скорости линии в к.е.

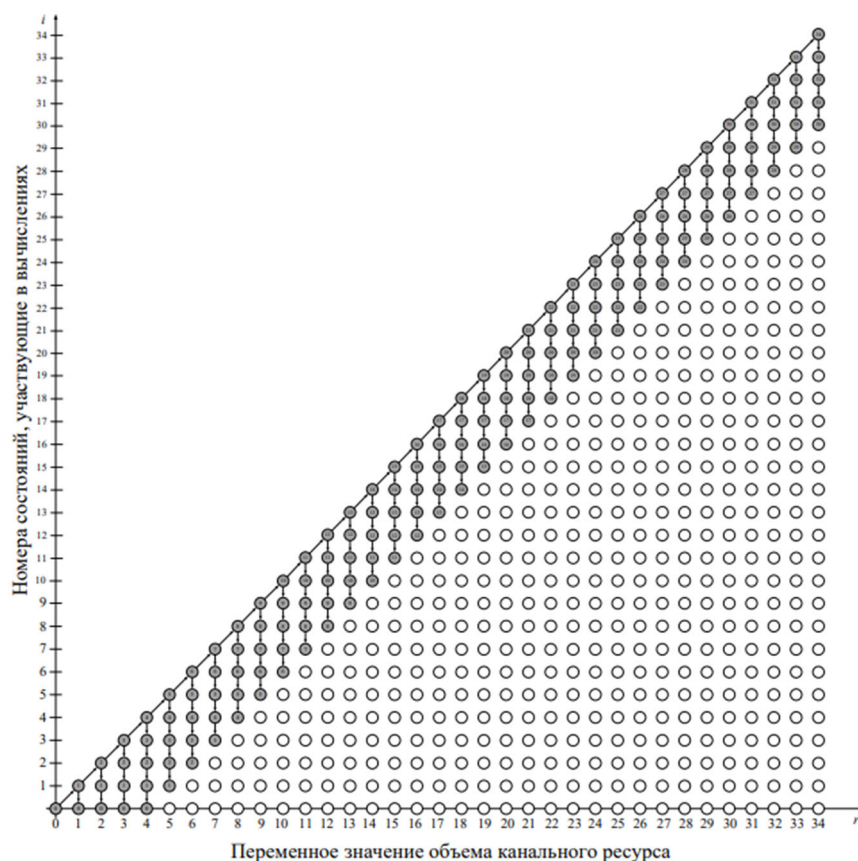


Рисунок 5. Зависимость количества состояний от объема канального ресурса

На рисунке 5 показан порядок вычислительных шагов при рекурсивном увеличении переменного числа канальных единиц r . Каждая вертикальная цепочка закрашенных кругов (пронумерованных слева направо) соответствует текущему значению r , при котором учитывается набор состояний с номерами от 00 до r . Таким образом, с ростом r (по оси абсцисс) мы пошагово добавляем верхние уровни состояний (по оси ординат), но при этом пересчитываем только ограниченное число наиболее «нагруженных» из них. Это демонстрирует эффективность оптимизированного подхода, так как в расчетах участвуют лишь те состояния, которые оказывают наибольшее влияние на оценку ресурса при каждом шаге.

Заключение

В данной работе предложен и обоснован оптимизированный рекурсивный метод расчета числа каналов (или эквивалентной пропускной способности линии) на основе классической формулы Эрланга В и ее расширения для мультисервисного трафика. Ключевая идея заключается в том, чтобы на каждом шаге хранить и пересчитывать лишь вероятности состояний с максимальной нагрузкой. Такой «частичный» подход уменьшает объем памяти и число арифметических операций на порядок по сравнению с прямым вычислением полной суммы, сохраняя при этом точность классической модели. Показано, что алгоритм легко «подогнать» под заранее известный диапазон подходящих значений, запуская рекурсию с произвольного стартового уровня r_0 .

На численном примере подтверждена сходимость процедуры и продемонстрирована нелинейная зависимость блокинг-вероятности от скорости линии: при росте r доля потерь уменьшается экспоненциально, а вычислительные затраты растут существенно медленнее благодаря оптимизации. Это делает метод пригодным для оперативного планирования ресурсов в современных NGN/5G-сетях, где необходимо быстро адаптироваться к изменяющемуся мультисервисному трафику и жестким требованиям QoS. Перспективами дальнейших исследований являются расширение алгоритма на модели с очередью (Эрланг

С, А), учет временной корреляции потоков (Self-Similar/Poisson MMPP) и интеграция с системами автоматического масштабирования сетевых функций (NFV/SDN).

Список литературы:

1. Iversen V. B. Teletraffic Engineering and Network Planning. – DTU, 2015 (дата обращения 25.04.2025 <https://www.semanticscholar.org/paper/Teletraffic-engineering-and-network-planning-Iversen/889f35298e196c3981230544bbb3d7257b3fb8a8>).
2. Степанов С.Н. Материалы курса лекций «Основы теории моделирования сетей и систем коммуникаций». – М.: Московский технический университет связи и информатики, 2008. – 157 с.
3. Степанов С.Н. Основы телетрафика мультисервисных сетей. – М.: ЭкоТрендз, 2010. – 392 с.
4. Деарт В.Ю, Мультисервисные сети связи. Транспортные сети и сети доступа. - М.: Брис - М., 2014. - 189 с.
5. Росляков А.В. Сети следующего поколения NGN. – М.: Эко-Трендз, 2008. – 205 с.
6. Наумов В.А., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В. Теория телетрафика мультисервисных сетей. – М.: Изд-во РУДН, 2007. – 192 с.

References:

1. Iversen V. B. Teletraffic Engineering and Network Planning. – DTU, 2015 (date of access 25.04.2025 <https://www.semanticscholar.org/paper/Teletraffic-engineering-and-network-planning-Iversen/889f35298e196c3981230544bbb3d7257b3fb8a8>).
2. Stepanov S. N. Lecture course materials "Fundamentals of the theory of modeling networks and communication systems". - M.: Moscow Technical University of Communications and Informatics, 2008. - 157 p.
3. Stepanov S. N. Fundamentals of teletraffic of multiservice networks. - M.: EcoTrends, 2010. - 392 p.
4. Deart V. Yu, Multiservice communication networks. Transport networks and access networks. - M.: Bris - M., 2014. - 189 p.
5. Roslyakov A. V. Next-generation networks NGN. - M.: Eco-Trends, 2008. - 205 p.
6. Naumov V. A., Samoilov K. E., Yarkina N. V. Theory of teletraffic of multiservice networks. - M.: RUDN University Press, 2007. - 192 p.