Научно-практический электронный журнал
Оригинальные исследования (ОРИС), *ISSN 2222-0402*
www.ores.su
original-research.ru

УДК 514.1

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИНЖЕНЕРНО-КОНСТРУКТОРСКИХ ЗАДАЧ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ РАВНОУДАЛЁННЫХ ТОЧЕК

Сулина Ольга Владимировна,
кандидат технических наук, доцент кафедры «Инженерная графика»,
Калужский филиал ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
e-mail:sulinaolga@bmstu.ru

Джаназян Мери Мгеровна,
студент группы МК1-41,
Калужский филиал ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
e-mail: dzhanazyanmm@student.bmstu.ru

Федин Михаил Алексеевич,
студент группы МК1-41,
Калужский филиал ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет) »
e-mail:fedinma@student.bmstu.ru

Аннотация

В работе проведён анализ определения и классификации геометрических мест точек (ГМТ) в контексте решений проектных инженерных задач. Описан алгоритм определения ГМТ, равноудалённых от одной, двух, трёх и четырёх точек, методами аналитической и евклидовой геометрии, а также методами трёхмерного моделирования и анализа данных и решений. Сделан вывод об эффективности применения различных методов решений инженерно-конструкторских задач оптимизации геометрического характера.

Ключевые слова: евклидова геометрия, геометрическое место точек, аналитическая геометрия, инженерно-конструкторская задача, трёхмерное моделирование

METHODS FOR SOLVING GEOMETRIC ENGINEERING DESIGN PROBLEMS FOR DETERMINING GEOMETRIC LOCATIONS OF EQUIDISTANT POINTS

Sulina Olga Vladimirovna,
Candidate of Technical Sciences, PhD, Department of Engineering Graphics,
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education «Bauman Moscow State Technical University» (Kaluga Branch)

e-mail:sulinaolga@bmstu.ru

Dzhanazian Meri Mgerovna,
student of group MK1-41,
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education «Bauman Moscow State Technical University» (Kaluga Branch)
e-mail:dzhanazyanmm@student.bmstu.ru

Fedin Mikhail Alekseevich,
student of group MK1-41,
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education «Bauman Moscow State Technical University» (Kaluga Branch)
e-mail:fedinma@student.bmstu.ru

ABSTRACT

An analysis of the definition and classification of geometric locations of points in the context of solutions to design engineering problems was carried out. Described is an algorithm for determining the geometric locations of points equidistant from one, two, three and four points using analytical and Euclidean geometry methods, as well as three-dimensional modeling and analysis of data and solutions. The conclusion was made about the effectiveness of using various methods for solving engineering design problems of optimization of a geometric nature.

Keywords: euclidean geometry, point geometry, analytical geometry, engineering design task, 3D modeling.

Понятие геометрическое место точек в проектировании форм деталей машин и механизмов в машиностроении является основой для решения, как правило, комплексных задач оптимизации.

Геометрическим местом точек (ГМТ) называется такая совокупность точек, которая содержит все точки, обладающие каким-либо свойством, и не содержит ни одной точки, не обладающей этим свойством [1].

Для определения ГМТ при решении инженерно-конструкторских задач применяются методы аналитической и евклидовой геометрии, а также методы трёхмерного моделирования и анализа данных и решений.

Согласно классификации, изложенной в исследовании [2], ГМТ можно структурировать на две категории: ГМТ, обладающие позиционными свойствами, и ГМТ, обладающие метрическими свойствами. К первой категории относятся ГМТ, основанные на взаимной принадлежности геометрических фигур (точек, линий, поверхностей) и тел. Ко второй категории относятся ГМТ, обладающие определёнными соотношениями углов или (и) расстояний от фиксированных геометрических фигур или тел.

Согласно классификации, изложенной в исследованиях [3], ГМТ можно классифицировать на три вида: ГМТ, имеющие смысл только при единственном значении аргумента (расстояние, угол и т.п.); ГМТ, имеющие решение при определённых значениях или пределах аргумента; ГМТ является постоянным и определяется заданием исходных данных.

Исследованиями по изучению ГМТ занимались учёные И.И. Александров [4], Г.С. Иванов [5] и др., много работ по исследованию ГМТ, равноудалённых от геометрических фигур в пространстве, написано В.И. Вышнепольским [6]. При конструировании сложных поверхностей и поиске оптимальных решений технических задач инженерного анализа и оптимизации практическая значимость исследований зависимости ГМТ от относительного положения геометрических фигур и определение вида и порядка ГМТ при непрерывности множества уникальна.

Рассмотрим ГМТ, равноудалённых от исходных фиксированных точек.

ГМТ от одной точки, представляет собой поверхность сферы. Данное ГМТ имеет смысл при определённых исходных данных (расстоянии) и определяется уравнением сферы в прямоугольной системе координат (1):

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2, \qquad (1)$$

где (x_0,y_0,z_0) — координаты исходной точки, R — расстояние от исходной точки.

ГМТ от двух точек, представляет собой плоскость, проходящую через середину отрезка, соединяющего исходные точки, и перпендикулярную ему:

$$A(x-\frac{A}{2})+B(y-\frac{B}{2})+C(z-\frac{C}{2})=0, \qquad (2)$$

где$A=x_1-x_0$, $B=y_1-y_0$, $C=z_1-z_0$ —координаты нормального вектора, (x_0,y_0,z_0) и (x_1,y_1,z_1) — координаты исходных точек.

ГМТ от двух точек A и B в общем случае на чертеже (эпюре), содержащим две или три проекции, можно задать двумя пересекающимися прямыми частного положения (например, фронталью и горизонталью) или следами плоскости (рис. 1).

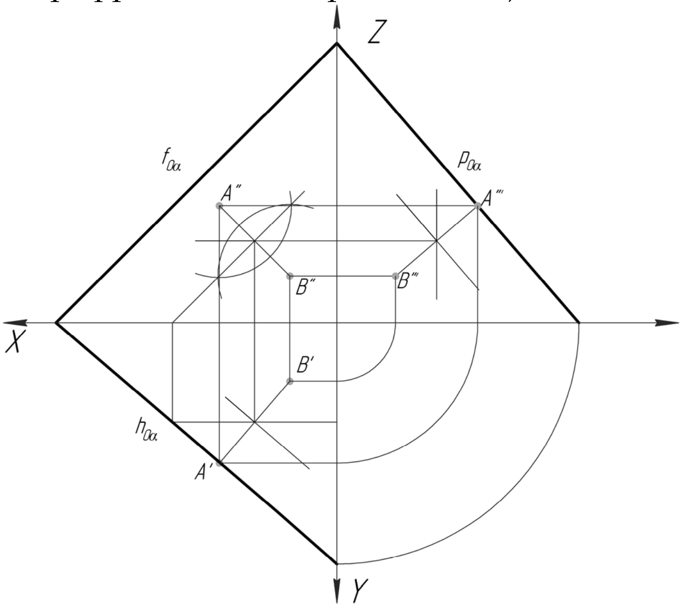

Рис 1. ГМТ, равноудалённое от двух фиксированных точек

В САПР в трёхмерном модельном пространстве возможно определение ГМТ, равноудалённое от двух точек, посредством построения пространственного отрезка, определения его характерной точки и построения элемента вспомогательной геометрии - плоскости через точку, перпендикулярно ребру.

ГМТ от трёх точек, не лежащих на одной прямой, есть прямая, проходящая через центр окружности, описанной вокруг треугольника, вершинами которого являются три исходные точки, перпендикулярная плоскости треугольника.

Для определения уравнения прямой необходимо представить ГМТ, как линию пересечения ГМТ, равноудалённых от двух попарно взятых точек. Эти ГМТ представляют собой плоскости, проходящие через середину отрезка, соединяющего две точки и перпендикулярные к нему. Соответственно, отрезок, соединяющий две вершины, является нормальным вектором плоскости.

$$x_3=\frac{1}{2}(x_0+x_1),\ y_3=\frac{1}{2}(y_0+y_1),\ z_3=\frac{1}{2}(z_0+z_1),$$

где (x_0,y_0,z_0), (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) — координаты исходных точек, (x_3,y_3,z_3) — координаты середины отрезка, соединяющего две точки.

$$x_4=\frac{1}{2}(x_2+x_1),\ y_4=\frac{1}{2}(y_2+y_1),\ z_4=\frac{1}{2}(z_2+z_1)$$

где (x_4,y_4,z_4) — координаты середины отрезка, соединяющего две точки.

$$\overline{n_1}=\left\{x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0\right\},\ \overline{n_2}=\left\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\right\},$$

где $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ — нормальные векторы.

Уравнение прямой или ГМТ от трёх точек, не лежащих на одной прямой:

$$\begin{cases} (x-x_3)(x_1-x_0)+(y-y_3)(y_1-y_0)+(z-z_3)(z_1-z_0)=0, \\ (x-x_4)(x_2-x_1)+(y-y_4)(y_2-y_1)+(z-z_4)(z_2-z_1)=0. \end{cases} \quad (3)$$

ГМТ от трёх точек A, B и C в общем случае на чертеже (эпюре) возможно определить построением перпендикулярной прямой к центру описанной окружности вокруг треугольника, вершинами которого являются исходные точки. На рис. 2. с помощью вращения вокруг фронтали определяется натуральный вид треугольника и, соответственно, с помощью элементарных геометрических построений центр описанной окружности, далее определяются проекции центра, и на основании свойств ортогонального проецирования строятся проекции искомого ГМТ, прямой.

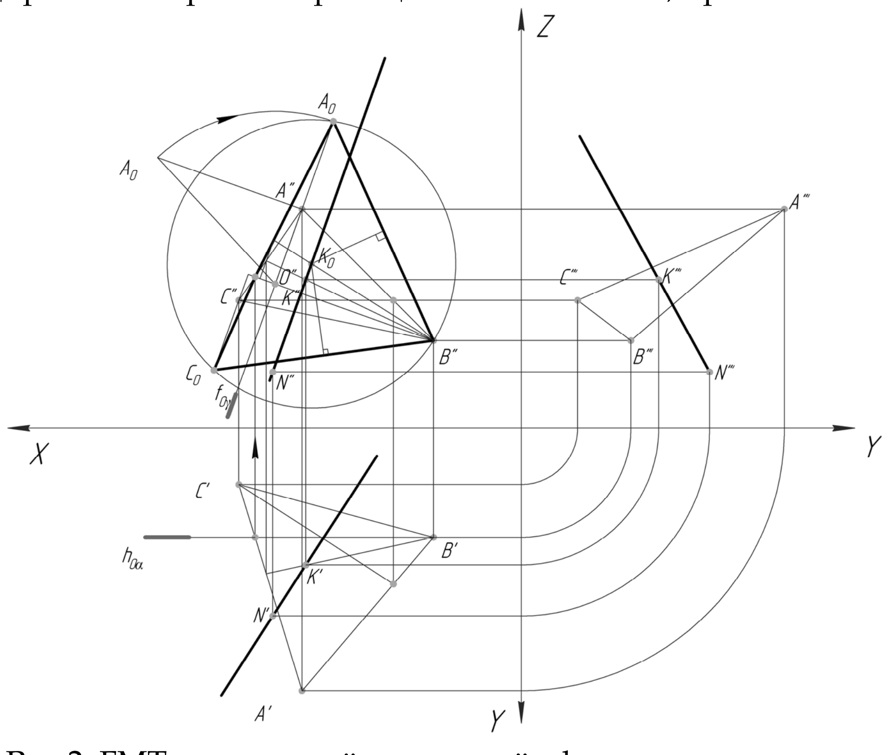

Рис 2. ГМТ, равноудалённое от трёх фиксированных точек

В САПР в трёхмерном модельном пространстве возможно определение ГМТ, равноудалённых от трёх точек, посредством построения вспомогательной плоскости по трём исходным точкам, создания эскиза в этой плоскости для построения центра описанной окружности и дальнейшего построения прямой в пространстве по точке и вектору нормали к плоскости.

ГМТ от четырёх точек, не лежащих на одной прямой, есть центр сферы, поверхность которой проходит через эти точки. При определении данных ГМТ решением может быть несколько точек, в зависимости от исходных данных.

Для определения координат точки решается система уравнений с подстановкой координат исходных точек в уравнение сферы:

$$\begin{cases} (x_0-x_4)^2+(y_0-y_4)^2+(z_0-z_4)^2=R^2, \\ (x_1-x_4)^2+(y_1-y_4)^2+(z_1-z_4)^2=R^2, \\ (x_2-x_4)^2+(y_2-y_4)^2+(z_2-z_4)^2=R^2, \\ (x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2+(z_3-z_4)^2=R^2. \end{cases} \qquad (4)$$

где (x_0,y_0,z_0), (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3) — координаты исходных точек, (x_4,y_4,z_4) — координаты искомого ГМТ, R — радиус сферы.

ГМТ от четырёх точек A, Bи Cв общем случае на чертеже (эпюре) определяется в следующей последовательности: по трём исходным точкам строим проекции треугольника и с помощью методов преобразования чертежа определяем его натуральный вид. На рис. 3 натуральный вид треугольника ABC определён с помощью замены плоскостей проекций. Далее, определяем центр описанной окружности этого треугольника. Эта окружность является параллелью искомого центра сферы. Строим параллель через точку D. Две параллели в плоскости π_4 занимают проецирующее положение. Через крайние точки проекций параллелей возможно определить с помощью элементарных геометрических построений проекции центра сферы. Далее, определим проекции центра сферы в начальной системе плоскостей и осях координат. Необходимо понимать, что построение необходимо повторить с группами других точек соответственно. Таким образом, возможно при определённых положениях исходных точек получить четыре решения.

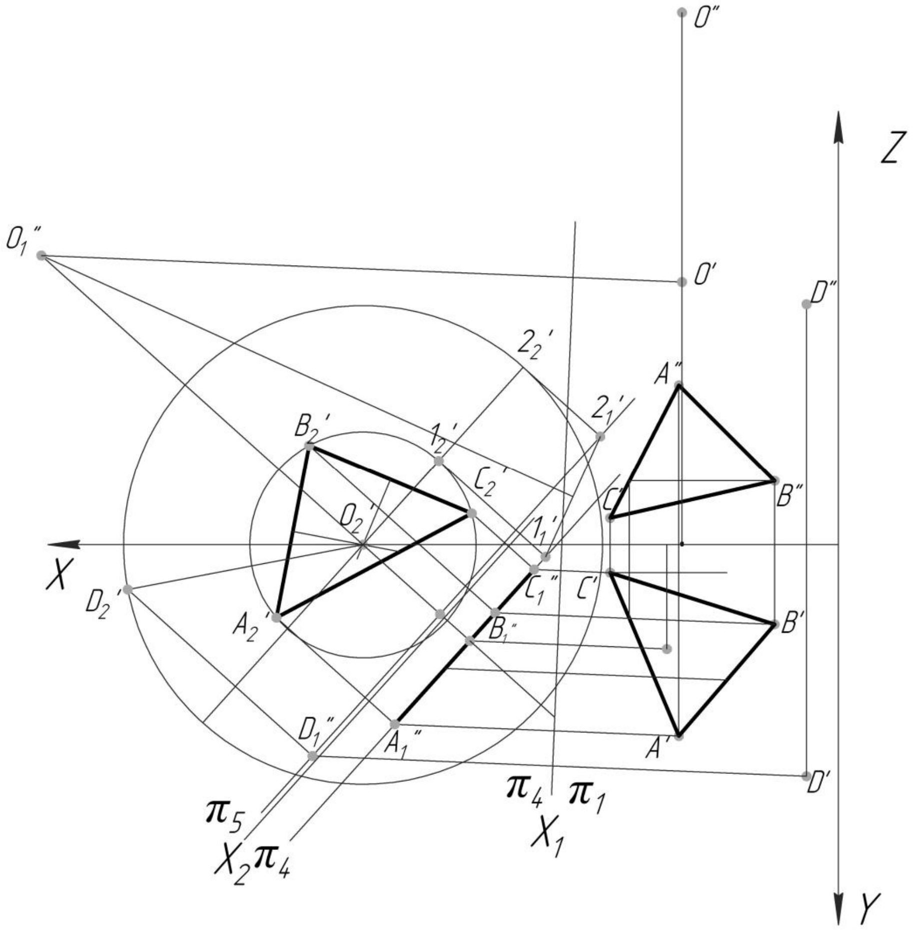

Рис 3. ГМТ, равноудалённое от четырёх фиксированных точек

В САПР в трёхмерном модельном пространстве возможно определение ГМТ, равноудалённых от четырёх точек с помощью построений элементов каркаса и вспомогательных плоскостей. Вспомогательная плоскость строится по трём исходным точкам, эскиз в этой плоскости строится для построения центра описанной окружности, строится прямая в пространстве по точке и вектору нормали к плоскости; затем строится плоскость, перпендикулярная к пространственному отрезку, проведённому через четвертую точку и точку, являющуюся вершиной треугольника. Плоскость должна содержать точку, являющуюся серединой отрезка. Точка пересечения прямой в пространстве и плоскости является равноудалённой точкой. Такие построения необходимо повторить со всеми группами точек. При определённых исходных условиях задача будет иметь четыре решения.

Таким образом, для решения инженерно-конструкторских задач при определении ГМТ, равноудалённых от исходных точек, эффективно могут применяться методы аналитической и евклидовой геометрии, а также методы трёхмерного моделирования и анализа данных и решений.

Список литературы:

1. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: АСТ: Астрель, 2008. 509 с.
2. Кудинова, Е. Ю. Геометрические места точек и линий и их применение при решении позиционных и метрических задач / Е. Ю. Кудинова, М. М. Цаболова, Т. С. Гуриев // Труды молодых учёных Владикавказского научного центра РАН. – 2014. – Т. 14, № 4. – С. 33-38
3. Сибирцев С. Ф. О геометрических местах точек / С. Ф. Сибирцев // Известия Томского политехнического института. — 1966. — Т. 143 : Начертательная геометрия и графика. — С. 57-69.
4. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построения с решениями. М.: УРСС, 2004. 276 с.
5. Иванов Г.С. Теоретические основы начертательной геометрии. М.: Машиностроение, 1998. 458 с.
6. Вышнепольский, В. И. Геометрические места точек, равноотстоящих от двух заданных геометрических фигур. Часть 1 / В. И. Вышнепольский, Н. А. Сальков, Е. В. Заварихина // Геометрия и графика. – 2017. – Т. 5, № 3. – С. 21-35.

References:

1. Vygodskii M.Ia. Handbook of Higher Mathematics. M.: AST: Astrel, 2008. 509 pp.
2. Kudinova E.Iu., Tsabolova M.M., Guriev T.S. Geometric locations of points and lines and their application in solving positional and metric problems // Works of young scientists of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 2014. vol. 4 (14), pp 33-38.
3. Sibirtsev S.F. About Point Geometry // News of the Tomsk Polytechnic Institute, 1966, vol. 143: Descriptive geometry and graphics, pp 57-69.
4. Aleksandrov I.I. Collection of geometric problems for constructions with solutions. M.: URSS, 2004. 276 pp.
5. Ivanov G.S. Theoretical foundations of descriptive geometry. M.: Mechanical Engineering, 1998. 458 pp.

6. Vyshnepolskii V.I., Salkov N.A., Zavarikhina E.V. The geometric locations of points equidistant from the two specified geometric shapes. Part 1 // Geometry and graphics, 2017, vol. 3(5), pp 21-35.